УДК 517.948

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАНТОВ МЕТОДА КАНТОРОВИЧА-КРАСНОСЕЛЬСКОГО ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

А.А. Артюшеня*, 5 курс*
Научный руководитель ***– В.М. Мадорский****, к.физ.-мат.н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

Для решения нелинейного операторного уравнения

$$f(x) + g(x) = 0\,,\ f \in C_D^{(2)}, g \in C_D \tag{1}$$

f, g – нелинейные операторы, действующие из некоторой выпуклой области D банахова пространства X в X рассмотрим алгоритм метода Канторовича-Красносельского

$$x_{n+1} = x_n - \left[f'(x_n)\right]^{-1}\left(f(x_n) + g(x_n)\right) = x_n - \Delta x_n\,,\ n = 0,1,\ldots,$$

Для решения уравнения (1) предлагается нелокальный алгоритм с регулировкой шага:

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки Δx_n

$$f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -\beta_n\left(f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)\right),\ n = 0,1,\ldots \tag{2}$$

Шаг 2. Находится очередное приближение

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n\,. \tag{3}$$

Шаг 3. Проверяется выполнение условия $\| f(x_{n+1}) \| \le \varepsilon$, ε-малая величина (параметр останова). Если условие выполняется, то конец просчетов, иначе

Шаг 4. Производится пересчет шаговой длины по формуле: если $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1} := 1$, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \|}{\| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \| \beta_n}\right), \tag{4}$$

$$\beta_0, \beta_{-1} \in [10^{-6}, 10^{-1}], \ \beta_{-1} < \beta_0;$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\beta_{n+1}\gamma_n}{\beta_n} \frac{\|f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)\|}{\|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\|}, \gamma_0 = \beta_0^2;$$

и переход на шаг 1.

Важнейшим недостатком классического варианта метода Канторовича-Красносельского является, то что не всегда удаётся выделить дифференцируемую часть $f(x)$. Рассмотрим пример:

Для решения нелинейного операторного уравнения (1) будем использовать рассмотренный алгоритм (2) - (4)

В качестве $f(x) + g(x)$ рассмотрим следующую модельную систему:

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} x_1^2 + x_2 + e^{|x_3|} = 1 + 2e, \\ x_1^2 + |x_3| = 2, \\ x_1^2 + \ln|x_2| - x_3 = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Применив к данной системе метод (2) - (4), мы получим приближенное решение, совпадающее с точным решение с точностью до заданной невязки.

Однако если мы модифицируем данную систему следующим образом:

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} x_1^2 + x_2 + e^{|x_3|} = 1 + 2e, \\ |x_1^2| + |x_3| = 2, \\ x_1^2 + \ln|x_2| - x_3 = 1. \end{cases}$$

То при выделении оператора $f(x)$, т.е. дифференцируемой части, получим:

$$f(x) = \begin{cases} x_1^2 + x_2, \\ 0 + 0, \\ x_1^2 + 0 - x_3. \end{cases},$$

В данной системе присутствует нулевая строка, что делает классический вариант метода Канторовича-Красносельского неприменимым для данной системы.

Рассмотрим систему:

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} x_1^2 + x_2 + e^{|x_3|} = 1 + 2e, \\ x_1^2 + |x_3| = 2, \\ x_1^2 + \ln|x_2| - x_3 = 1. \end{cases}$$

Для ее решения будем применять следующий алгоритм (2)-(4), однако в качестве оператора $f(x)$ возьмем следующий оператор:

$$f(x)=\begin{cases} x_1^2+x_2+e^{x_3}, \\ x_1^2+x_3, \\ x_1^2+0-x_3. \end{cases}$$

Данный оператор мы получили отбрасыванием модулей в исходном операторе, а элемент $\ln|x_2|$ мы опустил целиком, так как при отбрасывании в нем модуля возникали дополнительные трудности: в этом случае x_2 не должно принимать отрицательных значений.

Предлагаемый метод более универсален по сравнению с классическим в двух отношениях: во-первых, метод является нелокальным, во-вторых, в качестве $f(x)$ можно использовать дифференцируемую аппроксимацию оператора.

Для проведения вычислительного эксперимента была написана программа в среде Borland Delphi 7.0

Вычислительные эксперименты проводился при следующих начальных данных: точность $\varepsilon=10^{-12}$, $\beta_0=10^{-2}$, начальные приближения берутся с отрезка $[-3,3]$, для пересчета шаговой длины использовались регуляризованные и не регуляризованные методы неполного прогноза. Эксперимент проводился на ряде модельных систем, для иллюстрации рассмотрим систему:

$$f(x)+g(x)=\begin{cases} x_1^3+|x_2|+e^{|x_3|}=12, \\ |x_1^3|+|x_2^3|-|x_3|=35, \\ x_1+\ln|x_2|+2x_3=2+\ln 3. \end{cases} \qquad (6)$$

Для каждой системы было произведено 100 запусков. Для первой системы процент успешных запусков составил 85%, для системы (6) – 77%, для третьей системы – 25%. Скорость сходимости для первой системы составила в среднем 30 итерация, для системы (6) – 100 итераций, для третьей системы – 2000 итераций.

Вычислительный эксперимент показал, что предложенный вариант метода Канторовича-Красносельского позволяет решать с определенным успехом сложнейшие нелинейные системы уравнений, содержащие недифференцируемые элементы, что дает возможность использовать данный вариант метода при решении систем, для которых не подходит классический метод Канторовича-Красносельского.

Список используемых источников

1. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. Хайрер, Г.Ваннер – М.: Мир, 1999.

2. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М.Мадорский. – Брест.: БрГУ, 2005.- 186с.

3. Артюшеня, А.А., Сравнительный анализ эфективности одношаговых, двухшаговых и трёхшаговых методов решения нелинейных систем./А.А. Артюшеня, В.М. Мадорский // МАТЕРИАЛЫ III международной молодежной научно-практической конференции «Научный потенциал молодежи – БУДУЩЕМУ БЕЛАРУСИ» Часть 3- Пинск.:27 марта 2009г. ПолесГУ, 2009, с. 4-5.

4. Красносельский, М.А., Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко. П.П. Забрейко., Я.Б. Рутицкий, В.Я. Стеценко.– М.: Наука, 1969.– 455 с.