УДК 513.82

ТОРСЫ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

***Л.Н. Билецкая**, 5 курс*
*Научный руководитель – **А.А. Юдов**, к.физ.-мат.н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

Рассмотрим кривую $\gamma: \vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ в пространстве ${}^1R_4$.

Определение. *<u>Торсом</u> в пространстве ${}^1R_4$, определенном кривой γ называется поверхность, образованная всеми касательными к этой кривой.*

Сама кривая γ называется ребром возврата этого торса. Каждая касательная к ребру возврата называется прямолинейной образующей торса.

Уравнение торса, определяемого ребром возврата $\gamma: \vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ имеет вид $r(t,\tau) = \vec{\rho}(t) + \tau\vec{\rho}\,'(t)$.

На ребре возврата γ выберем естественную параметризацию. Пусть $t = t(s)$, тогда $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t(s))$ и $s=i\int_0^u |\vec{\rho}_t'|dt$. Исследуем торс в пространстве ${}^1R_4$, обозначив при этом $t = u$, $\tau = v$. Тогда уравнение торса запишется в виде: $r(u,v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{\rho}\,'(u)$.

Так как базисы $\{\vec{r}_v'; \vec{r}_u'\}$ и $\{\vec{\rho}_u'; \vec{\rho}_u''\}$ выражаются друг через друга, то $\Sigma_\tau = [M, \vec{r}_u', \vec{r}_v'] = [M, \vec{\rho}_u', \vec{\rho}_u'']$.

Введем координатные линии на поверхности торса: u-линии ($v = c$) и v-линии ($u = c$), тогда скалярное произведение векторов $\vec{r}_u', \vec{r}_v'$:

$$(\vec{r}_u', \vec{r}_v') = (\vec{\rho}_u' + v\vec{\rho}_u'', \vec{\rho}_u') = \vec{\rho}_u'^{\,2} + v(\vec{\rho}_u'', \vec{\rho}_u').$$

На ребре возврата γ выбираем естественную параметризацию. Пусть $u=u(s)$, тогда $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u(s))$ и $s = \int_0^u |\vec{\rho}_u'|\,du$. Параметр s обозначим через u, получим $|\vec{\rho}_u'| = 1$, тогда $(\vec{r}_u', \vec{r}_v') = 1$.

Перейдем к новым координатам U и V так, чтобы координатные линии были ортогональны, причем заметим, что v-линии – это прямолинейные образующие торса.

Пусть S – гладкая поверхность, $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ – ее векторное уравнение и $\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v} \neq 0$. Рассмотрим первую квадратичную форму поверхности S:

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Угол между кривыми равен углу между касательными. Пусть гладкие кривые ξ1 и ξ2 лежат на поверхности S с векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ и пересекается в некоторой точке X. Построим вектор $\overrightarrow{dr}$ так, чтобы он был вектором касательной к кривой ξ1 в точке X, и вектор $\overrightarrow{\tilde{d}r}$ – вектор касательной к кривой ξ2 в точке X.

Требуется, чтобы ортогональные линии были ортогональны. С учетом того, что u – естественный параметр, получим

$$\left(1 + v^2\vec{\rho}_u''^{\,2}\right)\frac{du\,d\tilde{u}}{dv\,d\tilde{v}} + \left(\frac{du}{dv} + \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{v}}\right) + 1 = 0.$$

Исходное семейство линий задано дифференциальным уравнением $\frac{du}{dv} = \lambda$, а ортогональные траектории получены в виде $\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{v}} = \mu$. Подставив эти выражения получим уравнение для μ: $E\lambda\mu + \lambda + \mu + 1 = 0$. Тогда искомая замена координат примет вид:

$$\begin{cases} U = u, \\ V = u + v. \end{cases}$$

А обратная замена:

$$\begin{cases} u = U, \\ v = V - U. \end{cases}$$

Уравнение торса в новых координатах примет вид:

$$\vec{r} = \vec{r}(U,V) = \vec{\rho}(U) + (V - U)\vec{\rho}\,'(U).$$

Обозначим U, V теми же символами u, v тогда уравнение торса перепишется следующим образом:

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = \vec{\rho}(u) + (v - u)\vec{\rho}\,'(u).$$

Рассмотрим на данном торсе кривую $u = u(t)$, $v = v(t)$, получим ее уравнение в виде:

$$r = r(t) = r(u(t), v(t)) = \vec{\rho}(u(t)) + (v - u)\vec{\rho}\,'(u(t)).$$

Направляющий вектор касательной $r_t' = \overrightarrow{r_u} \cdot u_t' + \overrightarrow{r_v} \cdot v_t'$.

Касательная к любой кривой, лежащей на торсе и проходящей через некоторую точку N, лежит в плоскости $[N, \overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}]$. Эта плоскость называется касательной плоскостью к торсу и обозначается $\sum_\tau = [N, \overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}]$.

Найдем векторы $\overrightarrow{r_u}$, $\overrightarrow{r_v}$:

$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + (v-u)\vec{\rho}'^{(u)}$, $\vec{r}_v' = \vec{\rho}_u'$, $\vec{r}_u' = \vec{\rho}_u''(v-u)$.

Таким образом, плоскость $\sum_\tau$ совпадает с соприкасающейся плоскостью ребра возврата γ.

Построим канонический репер в произвольной точке N торса. Будем считать параметр u естественным параметром ребра возврата, тогда

$|\vec{\rho}_u'| = i, \vec{\rho}_u'' \perp \vec{\rho}_u'$.

Введем следующие обозначения: $\overrightarrow{\varepsilon_1}^* = \vec{\rho}_u', \overrightarrow{\varepsilon_2}^* = \frac{\vec{\rho}_u''}{|\vec{\rho}_u''|}$. Тогда $\overrightarrow{\varepsilon_1}^*$ – вектор мнимой длины, а $\overrightarrow{\varepsilon_2}^*$ – вектор единичной длины, взаимно ортогональные и лежат в касательной плоскости к торсу в точке N, совпадающей с соприкасающейся плоскостью ребра возврата, причем $\overrightarrow{\varepsilon_1}^*$ идет по прямолинейной образующей, а $\overrightarrow{\varepsilon_2}^*$ ему ортогонален. Вектора $\overrightarrow{\varepsilon_3}^*, \overrightarrow{\varepsilon_4}^*$ получим из векторов $\overrightarrow{\varepsilon_3}, \overrightarrow{\varepsilon_4}$ соприкасающегося репера ребра возврата параллельным переносом в точку L. При этом получим репер $\{L, \overrightarrow{\varepsilon_1}^*, \overrightarrow{\varepsilon_2}^*, \overrightarrow{\varepsilon_3}^*, \overrightarrow{\varepsilon_4}^*\}$ в произвольной точке L торса, с условием

$\overrightarrow{\varepsilon_1}^* = \overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}^* = \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3}^* = \overrightarrow{\varepsilon_3}, \overrightarrow{\varepsilon_4}^* = \overrightarrow{\varepsilon_4}$.

Репер $R^* = \{L, \overrightarrow{\varepsilon_1}^*, \overrightarrow{\varepsilon_2}^*, \overrightarrow{\varepsilon_3}^*, \overrightarrow{\varepsilon_4}^*\}$ называют каноническим репером торса.

С учетом того, что $\overrightarrow{\varepsilon_1}^*, \overrightarrow{\varepsilon_2}^*, \overrightarrow{\varepsilon_3}^*, \overrightarrow{\varepsilon_4}^*$ зависят только от u, деривационные формулы канонического репера торса R^* имеют вид:

$$\begin{cases} \overrightarrow{r_u} = (v-u)k_1(u)\overrightarrow{\varepsilon_2}^*, \\ \left(\overrightarrow{\varepsilon_{1u}}^*\right)' = k_1(u)\overrightarrow{\varepsilon_2}^*, \\ \left(\overrightarrow{\varepsilon_{2u}}^*\right)' = k_1(u)\overrightarrow{\varepsilon_1}^* + k_2(u)\overrightarrow{\varepsilon_3}^*, \\ \left(\overrightarrow{\varepsilon_{3u}}^*\right)' = k_2(u)\overrightarrow{\varepsilon_2}^* + k_3(u)\overrightarrow{\varepsilon_4}^*, \\ \left(\overrightarrow{\varepsilon_{4u}}^*\right)' = -k_3(u)\overrightarrow{\varepsilon_3}^*. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \overrightarrow{r_v} = \overrightarrow{\varepsilon_1}^*, \\ \left(\overrightarrow{\varepsilon_{1v}}^*\right)' = \bar{0}, \\ \left(\overrightarrow{\varepsilon_{2v}}^*\right)' = \bar{0}, \\ \left(\overrightarrow{\varepsilon_{3v}}^*\right)' = \bar{0}, \\ \left(\overrightarrow{\varepsilon_{4v}}^*\right)' = \bar{0}. \end{cases}$$

Полученные результаты могут быть использованы в дифференциальной геометрии и теоретической физике.