УДК 372.85(035.3)

ПИФАГОРОВЫ ТРОЙКИ. МЕТОДЫ ПОИСКА РЕШЕНИЙ

А.Г. Головач*, 3 курс*
Научный руководитель – ***Е.П. Гринько****, к.п.н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

Для прямоугольного треугольника с катетами x и y и гипотенузой z выполняется теорема Пифагора: сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, то есть верно равенство

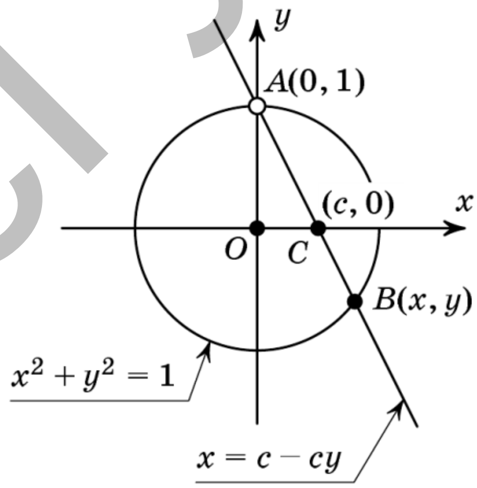
$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Опишем все пифагоровы тройки, то есть тройки целых чисел (x,y,z), для которых выполняется соотношение $x^2 + y^2 = z^2$. Прежде всего, заметим, что если найдена такая тройка, то, умножив все три числа на некоторое целое число, вновь получим пифагорову тройку. Поэтому достаточно найти лишь тройки взаимно простых чисел. Более того, достаточно найти тройки попарно взаимно простых чисел: если какие-то два из чисел x, y, z делятся на некоторое простое число p, то и третье число обязательно делится на p.

Заметим, что единственное решение с z=0 если x=y=z= 0, и в дальнейшем рассматривать его не будем. Для всех остальных решений уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ число z отлично от нуля. Разделив на его квадрат, получим новое уравнение

$$x^2 + y^2 = 1,$$

где $x = \frac{x}{z}, y = \frac{y}{z}$ – рациональные числа.



Уравнение (2) задает окружность S радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 1). Исходная задача свелась к следующей: перечислить все рациональные точки, то есть точки с рациональными координатами этой окружности. Оказывается, что их в некотором смысле столько же, сколько рациональных точек на числовой прямой. Некоторые из рациональных точек легко найти, например, (±1,0), (0,±1). Выберем одну из них, скажем A(0,1). Проведем через точку A всевозможные прямые (кроме горизонтальной). Каждая такая прямая l пересечет окружность еще в одной точке B(x, y) и ось абсцисс в некоторой точке C(c, 0).

Такова геометрия. А как же с арифметикой? Оказывается, что это соответствие сохраняет рациональность точки. Докажем, что точка B имеет рациональные ординаты тогда и только тогда, когда рационально число c. Прямая, проходящая через точки A и C, определяется уравнением $x = c - cy$. Подставим его в уравнение окружности. Получим, что $(c - cy)^2 + y^2 = 1$, то есть $(c^2 + 1)y^2 - 2c^2y + c^2 - 1 = 0$, откуда y = 1 (что соответствует точке A) или $y = \frac{c^2-1}{c^2+1}$, при этом $x = c - cy = \frac{2c}{c^2+1}$. Если число c рационально, то x и y тоже рациональные числа.

Обратное сразу вытекает из следующих двух утверждений:

1. Если координаты двух точек рациональны, то уравнение соединяющей их прямой можно записать так, чтобы оно имело рациональные коэффициенты.
2. Если две прямые задаются уравнениями с рациональными коэффициентами, то точка их пересечения (если она существует) имеет рациональные координаты.

Таким образом, каждое рациональное решение уравнения (2), кроме x = 1, y = 1, получается, если в формулы $x = \frac{2c}{c^2+1}$, $y = \frac{c^2-1}{c^2+1}$ подставим вместо c некоторое рациональное число.

Представим число c в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$ (m и n – целые числа). Тогда $x = \frac{2c}{c^2+1} = \frac{2mn}{m^2+n^2}$, $y = \frac{c^2-1}{c^2+1} = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$ (заметим, что при $n = 0, m \neq 0$ мы получаем «потерянное» было решение x = 0, y = 1).

Нам требуется найти все целые решения уравнения (1). Имеем:

$\frac{X}{Z} = \frac{2mn}{m^2+n^2}$, $\frac{Y}{Z} = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$,

ПолесГУ

где $m^2+n^2 \neq 0$. Дроби, стоящие в левых частях этих равенств несократимы, поскольку числа x, y, z попарно взаимно просты. Если бы мы знали, что дроби, стоящие в правых частях равенства, тоже несократимы, мы могли бы положить $x=2mn,\ y=m^2-n^2,\ z=m^2+n^2$, но например, при m = 5, n = 3 обе эти дроби сократимы. Однако они могут быть сократимы только на 2. Дробь $\frac{2mn}{m^2+n^2}$ может быть сокращена только на 2, в случае если m и n нечетные. Рассмотрим теперь вторую дробь: если простое число p делит и m^2-n^2, и m^2+n^2, то p делит $2m^2$ и $2n^2$. У m и n общих делителей нет, значит, p = 2, а m и n нечетные.

Итак, взаимно простые целые положительные решения (1) суть

$$x=mn, \qquad y=\frac{m^2-n^2}{2}, \qquad z=\frac{m^2+n^2}{2} \qquad (3)$$

при взаимно простых нечетных m и n, m > n > 0, а также

$$x=2mn, \qquad y=m^2-n^2, \quad z=m^2+n^2 \qquad (4)$$

при взаимно простых m и n, m > n > 0, одно из которое четно. Любые целые положительные решения получаются умножением (3) или (4) на натуральное число.

Заметим, что формулы (3) и (4) на самом деле совпадают. Если $x=pq$, $y=\frac{p^2-q^2}{2}$, $z=\frac{p^2+q^2}{2}$ – решение, вычисленное по формулам (3) (числа p и q оба нечетны и взаимно просты), то это же решение получается по формулам (4) при $m=\frac{p+q}{2}$, $n=\frac{p-q}{2}$ (m и n взаимно просты и ровно одно из этих чисел четно), правда x и y при этом меняются местам. Аналогично, любое решение вида (4) можно записать в виде (3). Можно сказать, что все целые положительные решения (1) описываются формулами (4) с точностью до перестановки x и y и умножения x, y и z на некоторое натуральное число.

Вот еще один способ записать все решения уравнения (1):

$$x=2mnr, \qquad y=(m^2-n^2)r, \qquad z=(m^2+n^2)r, \qquad (3'-4')$$

где m и n – произвольные целые числа, а r – подходящее рациональное число, то есть такое, что x, y, z – целые.

Интересным фактом, связанным с пифагоровыми числами, является следующий: прямоугольный треугольник с заданной гипотенузой m существует только при условии, что в каноническом разложении числа m встречается простой множитель вида 4k+1.

Рассмотрим *пример*. Пусть m=17. Число $17=4\cdot4+1=4^2+1^2$. Значит, p=4, q=1 и x=2pq, $y=p^2-q^2$. Итак, x=8, y=15. Мы получили пифагорову тройку (8, 15, 17), задающую прямоугольный треугольник.

Список использованных источников

1. Виленкин, Н. Я. За страницами учебника математики: Арифметика. Алгебра. Геометрия: кн. для учащихся 10-11 кл. общеобраз. учреждений / Н. Я. Виленкин. – М. : Просвещение, 1996. – 320 с.

2. Монахов, В. С. Алгебра и теория чисел: практикум: учеб. пособие / В. С. Монахов, А. В. Бузланов. – Минск : Изд. центр БГУ, 2007. – 264 с.

ПолесГУ