УДК 519.24

ИССЛЕДОВАНИЕ ВТОРОГО МОМЕНТА ОДНОЙ ОЦЕНКИ ВЗАИМНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

***Н.В. Гук**, 5 курс*
Научный руководитель – ***Е.И. Мирская**, к.физ.-мат. н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

Одной из задач спектрального анализа временных рядов является построение и исследование оценок спектральных плотностей стационарных случайных процессов, так как они дают важную информацию о структуре процесса.

К числу периодограммных методов спектрального оценивания, позволяющих получить оценку спектральной плотности непосредственно по исходному набору данных, относят метод Уэлча, в котором осреднение производится по множеству периодограмм, получаемых по пересекающимся и непересекающимся интервалам исходной последовательности данных.

Рассмотрим действительный r-мерный стационарный случайный процесс $X(t) = \{X_a(t), a=\overline{1,r}\}$, $t \in Z$, с $MX_a(t)=0$, $a=\overline{1,r}$, неизвестной взаимной спектральной плотностью $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi = [-\pi,\pi]$, $a,b=\overline{1,r}$.

Пусть $X_a(0), X_a(1), \ldots, X_a(T-1)$ – T последовательных, полученных через равные промежутки времени наблюдений за составляющей $X_a(t)$, $a=\overline{1,r}$, процесса $X(t)$, $t \in Z$, и пусть число наблюдений T представимо в виде $T = LN$, где L – число непересекающихся интервалов, содержащих по N наблюдений.

Используя метод Уэлча [1, с. 70] в качестве оценки взаимной спектральной плотности процесса, исследована статистика вида

$$\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda) = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} I_{ab}(\lambda,l),$$

где

$$I_{ab}(\lambda,l) = \left[2\pi \sum_{p=0}^{N-1} h_a^N(p) h_b^N(p)\right]^{-1} H_a(\lambda,l)\overline{H_b(\lambda,l)},$$

$l=\overline{1,L}$, $\lambda \in \Pi$, $a,b=\overline{1,r}$, расширенная периодограмма на l-ом интервале разбиения, а $H_a(\lambda,l)$ задается выражением

$$H_a(\lambda,l) = \sum_{t=0}^{N-1} h_a^N(t) X_a(t+(l-1)N) e^{-i\lambda(t+(l-1)N)},$$

$l=\overline{1,L}$, $\lambda \in \Pi$, $a=\overline{1,r}$.

В работе исследовано асимптотическое поведение дисперсии и ковариации оценки $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, $a,b=\overline{1,r}$.

Теорема 1. Если взаимная спектральная плотность $f_{ab}(x)$, $x \in \Pi$, $a,b=\overline{1,r}$, непрерывна в точке $x=\lambda$ и ограничена на Π, семиинвариантная спектральная плотность четвертого порядка ограничена на Π^3, окна просмотра данных $h_a^N(t)$, $t \in R$, $a=\overline{1,r}$, ограничены единицей и имеют ограниченную вариацию, выполняется неравенство

$$\sup_N \iiint_{\Pi^3} |\Phi_{abab}(y_1,y_2,y_3)| dy_1 dy_2 dy_3 \le D,$$

то оценка $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$, задаваемая равенством (1), удовлетворяет соотношению

$$\lim_{N\to\infty} D\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{L}Cf_{aa}(\lambda)f_{bb}(\lambda), & если\,\lambda\neq 0(\mathrm{mod}\,\pi),\\ \dfrac{1}{L}\left(f_{ab}(0)f_{ba}(0)+Cf_{aa}(0)f_{bb}(0)\right), & если\,\lambda=0(\mathrm{mod}\,\pi),\end{cases}$$

где C – некоторая постоянная, $\lambda\in\Pi,\ a,b=\overline{1,r}.$

Доказательство. Дисперсия оценки $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda),\ \lambda\in\Pi,\ a,b=\overline{1,r},$ может быть представлена в виде суммы трех слагаемых A_1, A_2 и A_3. Рассмотрим каждое из слагаемых.

$$|A_1|\leq\frac{(2\pi)^3}{L}\frac{\sum\limits_{p=0}^{N-1}\left(h_a^N(p)h_b^N(p)\right)^2}{\left(\sum\limits_{p=0}^{N-1}h_a^N(p)h_b^N(p)\right)^2}\iiint\limits_{\Pi^3}|\Phi_{abab}(y_1,y_2,y_3)|\times$$

$$\times\left|P_L\left[N(y_1+y_2)\right]\right|\left|f_{abab}(y_1+\lambda,y_2-\lambda,y_3-\lambda)\right|dy_1dy_2dy_3.$$

Учитывая, что семиинвариантная спектральная плотность четвертого порядка ограничена и выполняется неравенство (2), можно показать, что

$$\lim_{N\to\infty}A_1=0.$$

Рассмотрим случай $\lambda\neq 0\ (\mathrm{mod}\,\pi).$ Обозначим

$$I=\frac{(2\pi)^2}{L}\iint\limits_{\Pi^2}\Phi_{ab}(x-\lambda,x+\lambda)\Phi_{ba}(y+\lambda,y-\lambda)P_L\left[N(x+y)\right]dxdy.$$

На основании работы [2, с. 175] $I\xrightarrow[N\to\infty]{}0.$

Рассмотрим выражение $\left|A_2-If_{ab}(\lambda)f_{ba}(\lambda)\right|$. Сделаем замену переменных интегрирования $\alpha=x-\lambda,\ \beta=y-\lambda,$ тогда

$$\left|A_2-If_{ab}(\lambda)f_{ba}(\lambda)\right|\leq\left|\frac{(2\pi)^2}{L}\iint\limits_{\Pi^2}\Phi_{ab}(\alpha,\alpha+2\lambda)\Phi_{ba}(\beta+2\lambda,\beta)\times\right.$$

$$\times P_L\left[N(\alpha+\beta+2\lambda)\right]\left(f_{ab}(\alpha+\lambda)-f_{ab}(\lambda)\right)\left(f_{ba}(\beta+\lambda)-f_{ba}(\lambda)\right)+$$

$$\left.+f_{ab}(\lambda)\left(f_{ba}(\beta+\lambda)-f_{ba}(\lambda)\right)+f_{ba}(\lambda)\left(f_{ab}(\alpha+\lambda)-f_{ab}(\lambda)\right)d\alpha d\beta\right|\leq$$

$$\leq|I_1|+|I_2|+|I_3|.$$

Рассмотрим каждый из интегралов. Учитывая непрерывность взаимной спектральной плотности $f_{ab}(x)$ в точке $x=\lambda$ и используя неравенство Гельдера, и так как $f_{ab}(x)$ ограничена на $\Pi,$ получим

$$|I_1|\xrightarrow[N\to\infty]{}0.$$

Рассмотрим $|I_2|$.

$$|I_2|\leq|f_{ab}(\lambda)|\int\limits_{\Pi}|\Phi_{ab}(\alpha,\alpha+2\lambda)|d\alpha\int\limits_{\Pi}|\Phi_{ba}(\beta+2\lambda,\beta)||f_{ba}(\beta+\lambda)-f_{ba}(\lambda)|d\beta.$$

Применяя неравенство Гельдера и учитывая соотношение (3), $|I_2|\xrightarrow[N\to\infty]{}0.$

Рассмотрим $|I_3|$.

$$|I_3|=\left|\frac{(2\pi)^2}{L}\iint\limits_{\Pi^2}\Phi_{ab}(\alpha,\alpha+2\lambda)\Phi_{ba}(\beta+2\lambda,\beta)\times\right.$$

$$\times P_L\left[N(\alpha+\beta+2\lambda)\right] f_{ba}(\lambda)\left(f_{ab}(\alpha+\lambda)-f_{ab}(\lambda)\right) d\alpha d\beta\Big|.$$

Аналогично как и для $|I_2|$ можно показать, что $|I_3|\xrightarrow[N\to\infty]{}0.$ Откуда следует, что $|A_2|\xrightarrow[N\to\infty]{}0.$

Нетрудно показать, что функция $\varPhi_{aa}(x-\lambda)\varPhi_{bb}(y+\lambda)P_L\left[N(x+y)\right]$ является ядром на $\varPi^2$, $N=1,2,...,$ $L=1,2,...$ Следовательно, в условиях теоремы $|A_3|\xrightarrow[N\to\infty]{}\frac{1}{L}Cf_{aa}(\lambda)\,f_{bb}(\lambda).$

Второй случай доказывается аналогично. Теорема доказана.

Теорема 2. Если взаимная спектральная плотность $f_{ab}(\lambda),\ \lambda\in\varPi,\ a,b=\overline{1,r},$ непрерывна в точках $\lambda_1,\lambda_2\in\varPi$ и ограничена на $\varPi,$ семиинвариантная спектральная плотность четвертого порядка ограничена на $\varPi^3,$ окна просмотра данных $h_a^N(t),\ t\in R,\ a=\overline{1,r},$ ограничены единицей и имеют ограниченную вариацию, выполняется неравенство

$$\sup_N\iiint_{\varPi^3}\left|\varPhi_{a_1b_1a_2b_2}(y_1,y_2,y_3)\right|dy_1dy_2dy_3\le D,$$

то оценка $\widehat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda),$ задаваемая равенством (1), удовлетворяет соотношению

$$\lim_{N\to\infty}\operatorname{cov}\left\{\widehat{f}_{a_1b_1}^{(T)}(\lambda_1),\widehat{f}_{a_2b_2}^{(T)}(\lambda_2)\right\}=$$

$$=\begin{cases}0, & если\,\lambda_1\pm\lambda_2\ne0(\operatorname{mod}2\pi),\\ \dfrac{C_1}{L}f_{a_1a_2}(\lambda_1)\,f_{b_1b_2}(-\lambda_2), & если\,\lambda_1-\lambda_2=0(\operatorname{mod}2\pi),\lambda_1,\lambda_2\ne0(\operatorname{mod}\pi),\\ \dfrac{C_2}{L}f_{a_1b_2}(\lambda_1)\,f_{b_1a_2}(\lambda_2), & если\,\lambda_1+\lambda_2=0(\operatorname{mod}2\pi),\lambda_1,\lambda_2\ne0(\operatorname{mod}\pi),\\ \dfrac{C_1}{L}f_{a_1a_2}(0)\,f_{b_1b_2}(0)+\dfrac{C_2}{L}f_{a_1b_2}(0)\,f_{b_1a_2}(0), & если\,\lambda_1=\lambda_2=0(\operatorname{mod}\pi),\end{cases}$$

где $C_1,\ C_2$ – некоторые постоянные, $a_i,b_i=\overline{1,r},\ i=\overline{1,2}.$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Список использованных источников

1. Welch, P.D. The use of FFT for the estimation of power spectra / P.D. Welch // IEEE Trans. Electroacoust. – 1967. – V. 15, № 2. – P. 70-73.

2. Труш, Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов / Н.Н. Труш. – Мн.: БГУ, 1999. – 218 с.