УДК 519.62

РЕШЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДУФФИНГА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КАНТОРОВИЧА-КРАСНОСЕЛЬСКОГО

А.Н. Курак, *4 курс*
Научный руководитель – ***В.М. Мадорский****, к. физ.-мат. н., доцент*
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина

Рассмотрим краевую задачу для нелинейного уравнения второго порядка с краевыми условиями первого рода:

$$X'' + \alpha X' + \beta\left|X\right| + \gamma X^3 = F(\sin(t),\cos(t)),\ \ x(0)=0,\quad x(2\pi)=0$$

Введем на отрезке [a,b] сетку $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b$. Для каждого узла сетки составим разностное уравнение, причем в крайних узлах $x_0 = a,\quad x_N = b$ используем краевые условия. В узлах, достаточно удаленных от начала и конца отрезка [a,b] аппроксимации производных строятся по 3-м точкам. Заменим задачу её сеточным аналогом:

$$\frac{Y_{k+1}-2Y_k+Y_{k-1}}{h^2}+\alpha\frac{Y_{k+1}-Y_{k-1}}{2h}++\beta\left|Y_k\right|+\gamma Y_k^{\ 3}=F(\sin t_k,\cos t_k),$$

где $k=0,1,...n-1$

В результате получим нелинейную систему, состоящие из N+1 нелинейных численных уравнений относительно:

$$F(Y_{0,}Y_1,...Y_{n+1})=\begin{cases}Y_0=0,\\ \dfrac{Y_2-2Y_1+Y_0}{h^2}+\alpha\dfrac{Y_2-Y_0}{2h}+\beta\left|Y_1\right|+\gamma Y_1^{\ 3}-F(\sin t_1,\cos t_1)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \dfrac{Y_{k+1}-2Y_k+Y_{k-1}}{h^2}+\alpha\dfrac{Y_{k+1}-Y_{k-1}}{2h}+\beta\left|Y_k\right|+\gamma Y_k^{\ 3}-F(\sin t_k,\cos t_k)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ Y_{n+1}=0,\end{cases}$$

где $k=0,1,...n-1$

Полученную систему решим с помощью метода Канторовича-Красносельского.

Рассмотрим алгоритм решения:

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки ΔY_n

$f'(Y_k)(Y_{k+1}-Y_k)=-\beta_k\left(f(Y_k)+\beta_{k-1}g(Y_k)\right)$

где $k=0,1,...n-1$

Шаг 2. Находится очередное приближение:

$Y_{k+1}=Y_k+\Delta Y_k$.

Шаг 3. Проверяется выполнение условия $\| f(Y_{k+1})+g(Y_{k+1})\|\le\varepsilon$, ε-малая величина (параметр останова). Если условие выполняется, то конец просчетов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Производится пересчет шаговой длины по формуле: если $\left\|f(Y_{k+1})+g(Y_{k+1})\right\|<\left\|f(Y_k)+g(Y_k)\right\|$, то $\beta_{k+1}:=1$, иначе

$$\beta_{k+1}=\min\left(1,\frac{\gamma_k\ \|\ f(Y_k)+\beta_{k-1}g(Y_k)\ \|}{\|\ f(Y_{k+1})+\beta_k g(Y_{k+1})\ \|\ \beta_k}\right),$$

$$\beta_0,\beta_{-1}\in\left[10^{-6},10^{-1}\right],\ \beta_{-1}<\beta_0;$$

$$\gamma_{k+1}=\frac{\beta_{k+1}\gamma_k}{\beta_k}\frac{\left\|f(Y_k)+\beta_{k-1}g(Y_k)\right\|}{\left\|f(Y_{k+1})+\beta_k g(Y_{k+1})\right\|},\ \gamma_0=\beta_0^2;$$

и переход на шаг 1. Доказательство метода приведено в работе [1].

Для этого представим $F(x)$ в следующем виде: $F(x)=f(x)+g(x)=0$, где $f(x)$ диффиренцируемая часть, а $g(x)$ не диффиренцируема, то есть:

$$f(Y_0,Y_1,...Y_{n+1})=\begin{cases}Y_0,\\ \dfrac{Y_2-2Y_1+Y_0}{h^2}+\alpha\dfrac{Y_2-Y_0}{2h}+\gamma Y_1^{\ 3}-F(\sin t_1,\cos t_1),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \dfrac{Y_{k+1}-2Y_k+Y_{k-1}}{h^2}+\alpha\dfrac{Y_{k+1}-Y_{k-1}}{2h}+\gamma Y_k^{\ 3}-F(\sin t_k,\cos t_k),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ Y_{n+1},\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}0,\\ \beta|Y_1|,\\ \dots\dots,\\ \beta|Y_k|,\\ \dots\dots,\\ 0,\end{cases}$$

где $k=0,1,\dots n-1$

Рассматривалась задача при следующих значениях $\alpha=0,\beta=5,\gamma=1,F(\sin(t),\cos(t))=50\cos(t),\varepsilon=1E-12$, ε-точность решения нелинейной системы. Метод сходится к решению практически при любых начальных значениях. В результате проведения испытаний получены следующие результаты:

Начальное прближение	Количество итераций
Sin(t)	43
Sin(t)+Cos(t)	24
5Sin(t)	69
5Sin(t)+3Cos(t)	51
5Sin(t)+3Cos(t)+4	59

Список использованных источников

1. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений. – Брест: БрГУ, 2005. –65 с.