УДК 519.6 + 517.983.54

ПРАВИЛО ОСТАНОВА В МЕТОДЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

***А.В. Лозаненко**, 5 курс*
*Научный руководитель – **О.В. Матысик**, к.физ.-мат.н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

Для решения операторного уравнения $Ax = y_\delta$, где $A-$ ограниченный, положительный, самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве и $\|y - y_\delta\| \le \delta$, предлагается итерационная схема явного типа с итерационным шагом $\alpha \in \left(0, \frac{5}{4\|A\|}\right]$

$$x_{n,\delta} = 2(E - \alpha A)x_{n-1,\delta} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2,\delta} + \alpha^2 A y_\delta, \; x_{0,\delta} = x_{1,\delta} = 0. \qquad (1)$$

Здесь *E* – тождественный оператор. Рассматриваемая задача некорректна, так как $0 \in SpA$.

Априорный выбор числа итераций *n* в исходной норме гильбертова пространства получается в предположении, что имеется дополнительная информация на гладкость точного решения *x* операторного уравнения $Ax = y_\delta -$ его истокообразная представимость ($x = A^s z, \; s > 0$). Однако обычно сведения об истокообразности искомого решения неизвестны и тем самым априорные оценки погрешности оказываются неприменимыми. Тем не менее, итерационный метод (1) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться правилом останова по невязке [1-2]:

$$\left.\begin{array}{l}\|Ax_{n,\delta}-y_\delta\|>\varepsilon, \quad (n<m),\\ \|Ax_{m,\delta}-y_\delta\|\le\varepsilon,\end{array}\right\} \quad \varepsilon=b\delta, \quad b>1. \qquad (2)$$

Предполагаем, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т. е. $\|Ax_{0,\delta}-y_\delta\|>\varepsilon.$ Покажем возможность применения правила (2) к методу (1). Справедливы

Лемма 1. *Пусть* $A=A^*\ge 0, \|A\|\le M$. *Тогда для* $\forall w\in H$ $(E-Ag_n(A))w\to 0,\ n\to\infty$.

Лемма 2. *Пусть* $A=A^*\ge 0, \|A\|\le M$. *Тогда* $\forall v\in\overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $(n-1)^s\left\|A^s(E-Ag_n(A))v\right\|\to 0,\ n\to\infty,\ 0\le s<\infty$.

Лемма 3. *Пусть* $A=A^*\ge 0, \|A\|\le M$. *Если для* $v_0\in\overline{R(A)}$ *и некоторого* $n_k<\bar{n}=const$ *при* $k\to\infty$ *имеем* $\omega_k=A(E-Ag_{n_k}(A))v_0\to 0$, *то* $v_k=(E-Ag_{n_k}(A))v_0\to 0.$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $A=A^*\ge 0, \|A\|\le M$ *и пусть момент останова* $m=m(\delta)$ *в методе* (1) *выбирается по правилу* (2). *Тогда* $x_{m(\delta),\delta}\to x$ *при* $\delta\to 0.$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и пусть* $x=A^s z,\ s>0$. *Тогда справедливы оценки* $m(\delta)\le 2+\dfrac{s+1}{\alpha e}\left[\dfrac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta}\right]^{1/(s+1)}$,

$$\|x_{m(\delta),\delta}-x\|\le 2^{1/(s+1)}\left[(b+2)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}+\frac{5}{4}\alpha\left\{1+\frac{s+1}{\alpha e}\left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta.$$

(3)

Замечание 1. *Порядок оценки* (3) *есть* $O(\delta^{s/(s+1)})$, *и он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями* [1].

Замечание 2. Хотя формулировка теоремы 2 даётся с указаниями степени истокопредставимости s и истокопредставляющего элемента z, на практике их значение не потребуется, так как они не содержатся в правиле останова (2). И тем не менее в теореме 2 утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций m, обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке (2), как показывает теорема 1, обеспечивает сходимость метода, т.е. его регуляризующие свойства.

Итерационный метод (1) можно эффективно использовать при решении различных некорректных задач, встречающихся в технике, математической экономике, геофизике, спектроскопии, системах полной автоматической обработки результатов эксперимента.

Список использованных источников

1. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах /Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М.: Наука, 1986. – 178с.

2. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.