УДК 519.6 + 517.983.54

АПРИОРНЫЙ ВЫБОР ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ В НЕЯВНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

***А.В. Михайлов**, 4 курс*
*Научный руководитель – **В.Ф. Савчук**, к.физ.-мат.н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

1. Постановка задачи. В действительном гильбертовом пространстве H исследуется операторное уравнение I рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A – положительный ограниченный и самосопряжённый оператор, для которого нуль не является собственным значением, однако принадлежит спектру оператора A, и, следовательно, задача некорректна. Пусть $y \in R(A)$, т.е. при точной правой части y уравнение (1) имеет единственное решение x. Для отыскания этого решения применяется неявная итерационная процедура

$$(E+\alpha A)x_{n+1} = (E-\alpha A)x_n + 2\alpha y \; x_0 = 0 \tag{2}$$

Обычно правая часть уравнения известна с некоторой точностью δ, т.е. известен y_δ, для которого $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Поэтому вместо схемы (2) приходится рассматривать приближения

$$(E+\alpha A)x_{n+1,\delta} = (E-\alpha A)x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta \; x_{0,\delta} = 0 \tag{3}$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения при достаточно малых δ и $n\delta$ и достаточно больших n.

2. Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций.

2.1 Сходимость при точной правой части уравнения. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряжённого оператора A и формулой (2), по индукции получим $x - x_n = \int_0^M \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^n dE_\lambda y$, где $M = \|A\|$, E_λ – спектральная функция оператора A. Разобьём полученный интеграл на два: $x - x_n = \int_0^\varepsilon \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^n dE_\lambda y + \int_\varepsilon^M \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^n dE_\lambda y$. При $\alpha > 0$ и $\lambda \in (0, M]$, имеет место неравенство $\left|\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right| < 1$, и, следовательно, последний интеграл очевидным образом стремится к нулю по норме: $\left\|\int_\varepsilon^M \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^n dE_\lambda y\right\| \le q^n(\varepsilon)\left\|\int_\varepsilon^M \lambda^{-1} dE_\lambda y\right\| = q^n(\varepsilon)\left\|\int_\varepsilon^M dE_\lambda x\right\| \le q^n(\varepsilon)\|x\| \to 0, \quad n \to \infty$ (здесь $\left|\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right| \le q(\varepsilon) < 1,$ $\lambda \in (\varepsilon, M]$). Кроме этого, $\left\|\int_0^\varepsilon \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^n dE_\lambda y\right\| \le \left\|\int_0^\varepsilon \lambda^{-1} dE_\lambda y\right\| = \left\|\int_0^\varepsilon dE_\lambda x\right\| \le \|E_\varepsilon x\| \to 0,\ \varepsilon \to 0$, так как E_ε сильно стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ в силу свойства спектральной функции. Следовательно, при $\alpha > 0$ имеем $\|x - x_n\| \to 0,\ n \to \infty.$ Тем самым доказана сходимость метода (2) к точному решению операторного уравнения (1) при точной правой части y.

2.2 Сходимость при приближённой правой части уравнения. Итерационный процесс (3) является сходящимся, если нужным образом выбирать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ. Имеет место

Теорема. *Если выбирать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ так, чтобы $n\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$, то при условии $\alpha > 0$ итерационный процесс* (3) *сходится.*

Доказательство. Рассмотрим разность $\|x - x_{n,\delta}\| = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. По доказанному $\|x - x_n\| \to 0,\ n \to \infty$. Покажем, что $x_n - x_{n,\delta}$ можно сделать сходящимся к нулю. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряжённого оператора A, получим $x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^n (E + \alpha A)^{-n}\right](y - y_\delta) = \int_0^M \lambda^{-1}\left[1 - \left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^n\right] dE_\lambda (y - y_\delta)$

.

Оценим сверху положительную подынтегральную функцию $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^n\right]$ при условии $\alpha > 0$. По индукции нетрудно показать, что $g_n(\lambda) \le 2n\alpha$. Отсюда $\|x_n - x_{n,\delta}\| \le 2n\alpha\delta$. Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + 2n\alpha\delta$ и $\|x - x_n\| \to 0,\ n \to \infty$, то для сходимости метода (3) достаточно выбрать n в зависимости от δ так, чтобы $n\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$. Теорема доказана.

2.3 Оценка погрешности. Оценить скорость сходимости приближений (3) без дополнительных предположений невозможно, так как неизвестна и может быть сколь угодно малой скорость убывания к нулю $\|x - x_n\|$. Поэтому для оценки скорости сходимости метода будем использовать дополнительную априорную информацию на гладкость точного решения x уравнения (1) – возможность его истокообразного представления, т.е. что $x = A^s z$, $s > 0$. Тогда имеем $y = A^{s+1} z$ и, следовательно, получим $x - x_n = \int_0^M \lambda^s \left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^n dE_\lambda z$. Для оценки $\|x - x_n\|$ найдём максимум модуля подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda^s \left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^n$. При условии $\alpha > 0$ для достаточно больших n справедлива оценка $\max\limits_{[0,M]} |f(\lambda)| < s^s (4n\alpha)^{-s}$ и, следовательно $\|x - x_n\| < s^s (4n\alpha)^{-s} \|z\|$. Таким образом, общая оценка погрешности итерационной процедуры (3) запишется в виде $\|x - x_{n,\delta}\| \le s^s (4n\alpha)^{-s} \|z\| + 2n\alpha\delta$. Для минимизации полученной оценки погрешности вычислим правую часть в точке, в которой производная от неё равна нулю; в результате получим $\|x - x_{n,\delta}\|_{опт} \le (1+s)\, 2^{-s/(s+1)} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}$ и $n_{опт} = \frac{1}{2} s \alpha^{-1} 2^{-\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} \delta^{-\frac{1}{s+1}}$.

Очевидно, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α, но от него зависит $n_{опт}$. Поэтому для уменьшения $n_{опт}$ и, значит, объёма вычислительной работы, следует брать α по возможности большим, удовлетворяющим условию $\alpha > 0$ и так, чтобы $n_{опт} \in N$.

Предложенный метод может быть успешно применён для решения некорректных задач, встречающихся в технике, гравиметрии, спектроскопии, математической экономике.