УДК 519.6 + 517.983.54

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С САМОСОПРЯЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

О.А. Мостыка*, 5 курс*
Научный руководитель – ***О.В. Матысик****, к.физ.-мат.н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

Будем рассматривать в гильбертовом пространстве *H* операторное уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряжённым оператором A, для которого нуль является собственным значением, т. е. задача (1) некорректна и имеет неединственное решение. Предположим, что $y \in R(A)$, т. е. при точной правой части y уравнения решение (неединственное) задачи (1) существует. Для его отыскания используем итерационную схему неявного типа

$$x_{n+1} = (A^2 + B)^{-1}(Bx_n + Ay),\ x_0 = 0 \tag{2}$$

Здесь B – ограниченный вспомогательный самосопряжённый оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве B возьмем оператор $B = bE,\ b > 0,\ E$ – тождественный оператор.

Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M,\ y \in H,\ b > 0$, *тогда для метода* (2) *справедливы следующие утверждения*:

а) $Ax_n \to \Pi(A)y,\ \| Ax_n - y \| \to I(A, y) = \inf\limits_{x \in H} \| Ax - y \|$;

б) *процесс* (2) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо; в последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* – *минимальное решение уравнения* (1).

Доказательство. Применив оператор A к формуле (2), получим $A(A^2 + B)x_n = ABx_{n-1} + A^2y$, где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как $AP(A)y = 0$, то справедливо записать: $(A^2 + B)(Ax_n - \Pi(A)y) = B(Ax_{n-1} - \Pi(A)y)$. Обозначим $Ax_n - \Pi(A)y = v_n$, $v_n \in M(A)$, тогда $(A^2 + B)v_n = Bv_{n-1}$. Отсюда $v_n = (A^2 + B)^{-1}Bv_{n-1}$, следовательно, $v_n = (A^2 + B)^{-n}B^n v_0$. Так как A положительно определён в $M(A)$, т. е. $(Ax, x) > 0\ \forall x \in M(A)$ и $b > 0$, то $\left\| (A^2 + B)^{-1} B \right\| < 1$ и поэтому

$\dfrac{b}{\lambda^2 + b} < 1,\ \lambda \in [0, M]$. Тогда

$$v_n = (A^2 + B)^{-n}B^n v_0 = \int_0^M \frac{b^n}{(\lambda^2 + b)^n} dE_\lambda v_0 = \int_0^\varepsilon \frac{b^n}{(\lambda^2 + b)^n} dE_\lambda v_0 + \int_\varepsilon^M \frac{b^n}{(\lambda^2 + b)^n} dE_\lambda v_0$$

.

Так как $\dfrac{b}{\lambda^2 + b} \leq q < 1$ для $\lambda \geq \varepsilon$, то

$$\left\| \int_\varepsilon^M \frac{b^n}{(\lambda^2 + b)^n} dE_\lambda v_0 \right\| \leq q^n \left\| \int_\varepsilon^M dE_\lambda v_0 \right\| \leq q^n \|v_0\| \to 0,\ n \to \infty.$$

$\left\| \int_0^\varepsilon \dfrac{b^n}{(\lambda^2 + b)^n} dE_\lambda v_0 \right\| \leq \left\| \int_0^\varepsilon dE_\lambda v_0 \right\| = \|E_\varepsilon v_0\| \to 0,\ \varepsilon \to 0$ в силу свойств спектральной функции. Следовательно, $v_n \to 0,\ n \to \infty$, откуда получим, что $Ax_n \to \Pi(A)y$ и

$\Pi(A)y \in A(H)$. Значит, $\| Ax_n - y \| \to \| \Pi(A)y - y \| = \| P(A)y \| = I(A, y)$. Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо. Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* − минимальное решение уравнения (1) (оно единственно в $M(A)$). Тогда (2) примет вид

$$\left(A^2 + B\right)x_n = Bx_{n-1} + A\Pi(A)y = \left(A^2 + B\right)x_{n-1} + A^2(x^* - x_{n-1}).$$

Отсюда $x_n = x_{n-1} + \left(A^2 + B\right)^{-1} A^2 (x^* - x_{n-1})$. Последнее равенство разобьём:

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + \left(A^2 + B\right)^{-1} A^2 P(A)(x^* - x_{n-1}) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0;$$

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + \left(A^2 + B\right)^{-1} A^2 \Pi(A)(x^* - x_{n-1}) =$$

$$= \Pi(A)x_{n-1} + \left(A^2 + B\right)^{-1} A^2 [x^* - \Pi(A)x_{n-1}],$$

так как $x^* \in M(A)$. Обозначим $\omega_n = \Pi(A)x_n - x^*$, тогда из равенства $\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* - \left(A^2 + B\right)^{-1} A^2 [\Pi(A)x_{n-1} - x^*]$ получим $\omega_n = B\left(A^2 + B\right)^{-1} \omega_{n-1}$. Следовательно, $\omega_n = B^n \left(A^2 + B\right)^{-n} \omega_0$ и, аналогично v_n, можно показать, что $\omega_n \to 0$, $n \to \infty$. Таким образом, $\Pi(A)x_n \to x^*$. Отсюда имеем $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е . *Так как* $x_0 = 0$*, то* $x_n \to x^*$*, т.е. процесс* (2) *обеспечивает сходимость к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.*

Предложенный метод можно эффективно использовать при решении различных прикладных некорректных задач, встречающихся в математической экономике, геофизике, астрономии, диагностике плазмы.