УДК 517.62

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ НЕПОЛНОГО ПРОГНОЗА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДУФФИНГА

Т.А. Савко*, 5 курс*
Научный руководитель ***– В.М. Мадорский****, к.физ.-мат.н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

Дифференциальные уравнения описывают множество процессов в различных областях науки. Это задачи теории колебаний, квантовой механики, электродинамики, различные химические реакции, экономические модели и т.д. Поэтому решение начальных и краевых задач является важнейшей проблемой современной математики. На сегодняшний день имеется множество аналитических, численных и численно-аналитических методов решения краевых задач. Все они обладают достоинствами и недостатками. Аналитические методы хороши тем, что они точны и решение получается в аналитическом виде, но эти методы решают узкий класс задач, налагая на уравнение ряд ограничений. В связи с бурным развитием ЭВМ, численные методы являются наиболее предпочтительными. Одним из таких методов является разностный метод. Этот метод является универсальным и легко программируется на ЭВМ. Основной проблемой реализации этого метода является решение нелинейных систем уравнений, получающихся в результате аппроксимации производных. Однако эта проблема с успехом решается с помощью квазиньютоновских нелокальных итерационных процессов.

При решении нелинейной системы квазиньютоновскими методами на каждой итерации необходимо решать линейную систему, матрица которой представляет собой матрицу Якоби системы нелинейных уравнений и является диагональной. Если матрица Якоби содержит n диагоналей, то при применении регуляризованных алгоритмов используют матрицу, которая содержит (2n-1) диагоналей.

Рассмотрим краевую задачу для нелинейного уравнения второго порядка

$$x'' + \alpha x' + \beta x^m + \gamma |x| = F(\sin t, \cos t)$$

$$x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta$$

с краевыми условиями первого рода. Введем на отрезке [a,b] сетку $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b$. Проблемой этой задачи является наличие модуля, поскольку модуль не дифференцируем, для решения задачи будем использовать модификацию метода Канторовича-Красносельского. Заменим задачу её сеточным аналогом:

$$\frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{h^2} + \alpha \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2h} + \beta x_k^m + \gamma |x_k| = F(\sin t_k, \cos t_k) \;\; k = \overline{1, n-1}$$

Воспользуемся вспомогательной функцией , которая не содержит модуль:

$$\frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{h^2} + \alpha \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2h} + \beta x_k^m + \gamma x_k = f(x_k) \;\; k = \overline{1, n-1}$$

Для каждого узла сетки составим разностное уравнение, причем в крайних узлах $x_0 = a, \quad x_N = b$ используем краевые условия. В результате получим две нелинейные системы, состоящие из N+1 нелинейных уравнений. Исходную задачу запишем в операторном виде:

F(x)=0

и введем эквивалентную замену:

F(x)=f(x)+ F(x) – f(x)= f(x)+ g(x)=0

Полученная система решается с помощью нелокальных регуляризованных квазиньютоновских итерационных процессов неполного прогноза[1, с.52-54]. Предлагаемый процесс состоит из 4 этапов:

Этап 1. Решается линейное уравнение относительно Δx_n :

$$\left(\alpha\beta_n \| f(x_n) \|^2 E + \overline{f'(x_n)} f'(x_n)\right) \Delta x_n = -\overline{f'(x_n)}(f(x_n) + g(x_n)), \;\; \alpha \in [10^{-6}; 10^{-3}], \; \beta_0 \in [10^{-4}; 10^{-1}]$$

Этап 2. Вносится поправка в вектор x_n :

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots, \;\; \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}]$$

Этап 3. Если $\| f(x_{n+1}) + g(x_{n+1}) \| < \varepsilon$, где ε – малая величина (параметр останова), то конец просчётов, иначе переход на шаг 4.

Этап 4. Определяется новая шаговая длина: если $\| f(x_{n+1}) + g(x_{n+1}) \| < \| f(x_n) + g(x_n) \|$, то $\beta_{n+1} = 1,$ иначе пересчет β_{n+1} по указанным ниже формулам и переход на этап 1.

На этапе 1 нами решается СЛАУ с пятидиагональной матрицей с помощью пятдиагональной матричной прогонки, что позволяет очень быстро решать такие СЛАУ.

Решение системы является приближенным решением краевой задачи (1) в соответствующих узлах сетки. В качестве итерационных параметров выбираем следующие:

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \| f(x_n) \|}{\beta_n \| f(x_{n+1}) \|}\right), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \| f(x_n) \|}{\| f(x_{n+1}) \|}, \gamma_0 = \beta_0^2, \qquad \textit{метод 1}$$

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \| f(x_n) \|}{\beta_n \| f(x_{n+1}) \|}\right), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma \beta_n}{\beta_{n+1}}, \gamma_0 = \beta_0^2$$

метод 2

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|}\right), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \|f(x_n)\| \left(\|f(x_n)\| + \|f(x_{n+1})\|\right)}{2\|f(x_{n+2})\|^2}, \gamma_0 = \beta_0^2$$

метод 3

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \beta_n \|f(x_0)\|}{\|f(x_{n+1})\|}\right), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \beta_n}{\beta_{n+1}}, \gamma_0 = 1.$$

метод 4

Решение системы является приближенным решением краевой задачи (1) в соответствующих узлах сетки.

Восстановление сеточного решения в аналитическом виде осуществляется с помощью отрезка ряда Фурье по полиномам Чебышева I рода.

Будем применять для решения задачи (2) метод пятидиагональной матричной прогонки.

Проведенные численные эксперименты позволяют сделать следующие выводы:

Метод пятидиагональной матричной прогонки учитывает специфику одноимённых с методом систем и является очень быстрым. При реализации метода прогонки для пятидиагональной матрицы выполняется $14n$ операций умножения и деления. Для сравнения отметим, что при использовании метода Гаусса число действий умножения и деления близко к $2n^3/3$. Естественно, если матрица системы позволяет использовать метод прогонки, то следует использовать именно его. При таком подходе мы практически не проигрываем в точности, но при этом можем очень значительно (на порядки) сократить количество операций, а значит и время решения задачи.

Наиболее эффективными из рассмотренных методов можно считать Метод 1, Метод 2 и Метод 3, т.к. они ведут себя более стабильно, если мы увеличиваем количество точек разбиения, затем Метод 4,т.к. с увеличением количества точек разбиения увеличивается и количество итераций.

Результаты просчетов сведены в таблицы, в которой внесены результаты численного эксперимента в случае непериодической задачи с краевыми условиями первого рода:

$$y'' + 0.2y' + |y| + y^3 = 50\cos(x), \qquad y(0) = 1.58, \;\; y(2\pi) = 1.58$$

Таблица – Зависимость точности решения от метода реше*ния*

N=384

метод	Точность решения	Кол-во итераций
I	8,17827760155032E-12	44
II	7,48709194337135E-12	33
III	8,43770057487876E-12	57
IV	8,98414952650369E-12	89

N=565

метод	Точность решения	Кол-во итераций
I	9,98404611067224E-12	44
II	9,89949190627813E-12	59
III	9,33093289810772E-12	53
IV	9,81448771869357E-12	102

N- размерность численной системы.

Список используемых источников

1. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М.Мадорский. – Брест: БрГУ, 2005.- 186с.