УДК 519.24

ИССЛЕДОВАНИЕ МОМЕНТОВ РАСШИРЕННОГО КОНЕЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НАБЛЮДЕНИЙ

Т.Г. Стасюк, *4 курс*
Научный руководитель – **_Е.И. Мирская_**, *к. физ.-мат. н., доцент*
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина

При статистической обработке данных, полученных в результате наблюдений за явлениями в различных областях человеческой деятельности, приходится иметь дело с анализом временных рядов. Часто при этом используются спектральные методы обработки информации.

Одной из задач спектрального анализа временных рядов является построение исследование оценок спектральных плотностей, которые дают важную информацию о структуре процесса.

Пусть $X^r(t), t \in Z$, r-мерный действительный стационарный случайный процесс. Будем предполагать, что $MX_a(t) = 0$, $R_{ab}(\tau) = MX_a(t+\tau)X_b(t), t, \tau \in Z$ – взаимная ковариационная функция, $f_{ab}(\lambda), \lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$, $a, b = \overline{1,r}$ - взаимная спектральная плотность рассматриваемого процесса.

Пусть $X_a(0), X_a(1), \ldots, X_a(T-1) - T$ последовательных, полученных через равные промежутки времени наблюдений за составляющей $X_a(t), a = \overline{1,r}$, процесса $X^r(t), t \in Z$.

Построим статистику вида

$$d_a^T(\lambda) = \left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t)\right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=0}^{T-1} X_a(t) h_T(t) e^{-it\lambda},$$

$\lambda \in \Pi$, которую будем называть расширенным конечным преобразованием Фурье наблюдений, где $h_T(t) = h(\frac{t}{T})$ – функция, называемая окном просмотра данных, равная нулю вне промежутка $[0, T)$. Так как математическое ожидание рассматриваемого процесса равно 0, то для статистики $d_a^T(\lambda)$, $Md_a^T(\lambda) = 0$. Рассмотрим второй момент расширенного конечного преобразования Фурье наблюдений, заданного выражением (1).

Теорема 1. *При любых* $\lambda_1, \lambda_2 \in \Pi$, *для статистики* $d_a^T(\lambda)$, *задаваемой выражением (1), справедливы следующие соотношения*

$$cum\left(d_a^T(\lambda_1), d_a^T(\lambda_2)\right) = \int_{\Pi} f_{ab}(v) \Phi_T(v-\lambda_1, v-\lambda_2) dv,$$

$$cum\left(d_a^T(\lambda_1), d_a^T(\lambda_2)\right) = \sum_{u=-(T-1)}^{T-1} e^{-i\lambda_1 u} R_{ab}(u) H_T(u; \lambda_1 - \lambda_2),$$

где $a, b = \overline{1,r}$

$$H_T(u; \lambda_1 - \lambda_2) = \left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t)\right]^{-1} \sum_{t=0}^{T-1} h_T(u+t) h_T(t) e^{-it(\lambda_1 - \lambda_2)},$$

$$\Phi_T(x, y) = \left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t)\right]^{-1} \varphi_T(x) \overline{\varphi_T(y)},$$

причем $\overline{\varphi_T(y)}$ *является функцией комплексно-сопряженной к* $\varphi_T(y)$, $x, y \in \Pi$, *а*

$$\varphi_T(x) = \sum_{t=0}^{T-1} h_T(t) e^{ixt},$$

$x \in \Pi$.

Доказательство. Так как $Md_a^T(\lambda) = 0$, то из свойств семиинварианта второго порядка вытекает, что

$$cum\left(d_a^T(\lambda_1), d_a^T(\lambda_2)\right) = M\left\{\left[2\pi\sum_{t_1=0}^{T-1} h_T^2(t_1)\right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{t_1=0}^{T-1} X_a(t_1) h_T(t_1) e^{-it_1\lambda_1} \times\right.$$

$$\left.\times\left[2\pi\sum_{t_2=0}^{T-1} h_T^2(t_2)\right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{t_2=0}^{T-1} X_a(t_2) h_T(t_2) e^{-it_2\lambda_1}\right\} =$$

$$= \sum_{t_1,t_2=0}^{T-1} M\left\{X_a(t_1) X_a(t_2)\right\} h_T(t_1) h_T(t_2) e^{-i(t_1\lambda_1 - t_2\lambda_1)} \left[2\pi\sum_{t_2=0}^{T-1} h_T^2(t_2)\right]^{-1}.$$

Используя определение взаимной ковариационной функции и стационарность процесса $X^r(t), t \in Z,$ имеем

$$cum\left(d_a^T(\lambda_1), d_a^T(\lambda_2)\right) = \left[2\pi\sum_{t_2=0}^{T-1} h_T^2(t)\right]^{-1} \sum_{t_1,t_2=0}^{T-1} R_{ab}(t_1 - t_2) \times$$
$$\times h_T(t_1) h_T(t_2) e^{-i(t_1\lambda_1 - t_2\lambda_1)}.$$

При замене переменных суммирования $t_1 - t_2 = u, t_2 = t$, правая часть равенства (5) будет иметь вид

$$\left[2\pi\sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t)\right]^{-1} \sum_{u=-(T-1)}^{T-1} R_{ab}(u) \sum_{t=0}^{T-1} h_T(u+t) h_T(t) e^{-i[(u+t)\lambda_1 - t\lambda_2]},$$

откуда вытекает справедливость соотношения (3).

Докажем соотношение (2). В соотношении (5) взаимную ковариационную функцию выразим через взаимную спектральную плотность. Получим

$$cum\left(d_a^T(\lambda_1), d_a^T(\lambda_2)\right) = \left[2\pi\sum_{t_2=0}^{T-1} h_T^2(t)\right]^{-1} \sum_{t_1,t_2=0}^{T-1} h_T(t_1) h_T(t_2) e^{-i(t_1\lambda_1 - t_2\lambda_1)} \int_{\Pi} f_{ab}(v) e^{i(t_1 - t_2)v} dv.$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования, имеем

$$cum\left(d_a^T(\lambda_1), d_a^T(\lambda_2)\right) = \int_{\Pi} f_{ab}(v) \left[2\pi\sum_{t_2=0}^{T-1} h_T^2(t)\right]^{-1} \left\{\sum_{t_1=0}^{T-1} h_T(t_1) e^{i(v-\lambda_{11})t_1} \sum_{t_2=0}^{T-1} h_T(t_2) e^{i(v-\lambda_{12})t_2}\right\} dv =$$

$$= \int_{\Pi} f_{ab}(v) \Phi_T(v - \lambda_1, v - \lambda_2) dv,$$

где функция $\Phi_T(x, y)$ задается выражением (4). Теорема доказана.

Лемма. *Если функция $h_T(t), t \in Z$, ограничена постоянной L и имеет ограниченную постоянной M вариацию, то*

$$I = \left|\sum_{t=0}^{T-1} h_T(u+t) h_T(t) e^{-i\lambda t} - \sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t) e^{-i\lambda t}\right| \le LM|u|,$$

$$u = \overline{-(T-1), T-1}, \lambda \in \Pi.$$

Теорема 2. *Если спектральная плотность $f_{aa}(\lambda)$ ограничена на Π и непрерывна в точке λ, $\lambda \in \Pi$, а окна просмотра данных ограничены и имеют ограниченную вариацию, то*

$$\lim_{T\to\infty} Dd_a^T(\lambda) = f_{aa}(\lambda),$$

где $a = \overline{1,r}$.

Доказательство. Используя свойства функции $\Phi_{\text{Т}}(\nu)$, имеем

$$\left|\int_{\Pi} f_{aa}(\nu)\Phi_{\text{Т}}(\nu-\lambda)d\nu - f_{aa}(\lambda)\right| = \left|\int_{\Pi} f_{aa}(\nu)\Phi_{\text{Т}}(\nu-\lambda)d\nu - \int_{\Pi} f_{aa}(\lambda)\Phi_{\text{Т}}(\nu-\lambda)d\nu\right| =$$

$$= \left|\int_{\Pi} (f_{aa}(\nu) - f_{aa}(\lambda))\Phi_{\text{Т}}(\nu-\lambda)d\nu\right| \le \int_{\Pi} |f_{aa}(\nu) - f_{aa}(\lambda)||\Phi_{\text{Т}}(\nu-\lambda)|d\nu =$$

$$= \int_{\{|\nu|\le\delta\}} |f_{aa}(\nu) - f_{aa}(\lambda)||\Phi_{\text{Т}}(\nu-\lambda)|d\nu + \int_{\Pi/\{|\nu|\le\delta\}} |f_{aa}(\nu) - f_{aa}(\lambda)||\Phi_{\text{Т}}(\nu-\lambda)|d\nu = I_1 + I_2,$$

для некоторого $0 < \delta < \pi$.

Так как функция $f_{aa}(\nu)$ непрерывна в точке $\nu = \lambda$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что как только $|\nu| \le \delta$, то $|f_{aa}(\nu) - f_{aa}(\lambda)| \le \varepsilon$. Откуда

$$I_1 \le \varepsilon \int_{\{|\nu|\le\delta\}} |\Phi_{\text{Т}}(\nu-\lambda)|d\nu < \infty.$$

Следовательно, его можно сделать сколь угодно малым за счет выбора ε.

$$\mathrm{I}_2 \le 2\max|f_{aa}(\nu)| \int_{\Pi/\{|\nu|\le\delta\}} |\Phi_{\text{Т}}(\nu-\lambda)|d\nu.$$

Используя свойства ядра Фурье, которые приведены в работе [1], получим

$$I_2 \xrightarrow[T\to\infty]{} 0.$$

Теорема доказана.

Список использованных источников

1. Труш, Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов / Н.Н. Труш. – Минск: БГУ, 1999. – 218 с.