УДК 517.983+519.6

СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА С АПОСТЕРИОРНЫМ ВЫБОРОМ ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ

***Е.А. Ступников**, 5 курс*
*Научный руководитель – **В.Ф. Савчук**, к.физ.-мат.н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С.Пушкина

В гильбертовом пространстве H решается уравнение 1-го рода

$$Ax = y \tag{1}$$

где A – ограниченный положительный и самосопряженный оператор, в предположении, что нуль принадлежит спектру оператора A, но не является его собственным значением. Тогда задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если решение уравнения (1) существует, то будем искать его с помощью итерационного метода

$$x_{n+1} = (E - \alpha A^2)x_n + 2\alpha y, \;\; x_0 = 0 \tag{2}$$

Обычно правая часть уравнения (1) известна с некоторой точностью δ, т.е. известно y_δ такое, что $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Тогда метод (2) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta,\ x_{0,\delta} = 0 \tag{3}$$

Априорный выбор числа итераций $n_{опт}$ получен в предположении, что точное решение x истокопредставимо, т.е. $x = A^s z,\ s > 0$. Однако не всегда имеются сведения об элементе z и степени истокопредставимости s. Тем не менее метод (3) становится вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке. Зададим $\varepsilon > 0,\ \varepsilon = b\delta,\ b > 1$ и момент останова m определим условиями:

$$\left.\begin{aligned} &\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon,\ (n < m),\\ &\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le \varepsilon, \end{aligned}\right\},\varepsilon = b\delta,\ b > 1 \tag{4}$$

Предположим, что при начальном приближении невязка достаточно велика, а именно, больше уровня останова, т.е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Докажем возможность применения правила (4) для метода (3), т.е. докажем, что метод (3) с правилом останова (4) сходится. Получим оценку погрешности метода (3) и оценку для момента останова.

Доказаны

Теорема 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0,\ \|A\| \le M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе (3) выбирается по правилу (4). Тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть* $x = A^s z,\ s > 0$, *тогда справедливы оценки*

$$m(\delta) \le 1 + \frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{2}{s+1}},$$

$$\|x_{m(\delta),\delta} - x\| \le [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}} + \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}} 2\alpha^{1/2}\left\{1 + \frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{2}{s+1}}\right\}^{1/2}\delta \tag{5}$$

Замечание 1. Порядок оценки (5) есть $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$, и он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.

Замечание 2. Хотя формулировка теоремы 2 дается с указаниями степени истокопредставимости s и истокопредставимого элемента z, на практике их значение не потребуется, так как они не содержатся в правиле останова (4). И тем не менее в теореме 2 утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций m, обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке (4), как показывает теорема 1, обеспечивает сходимость метода, т.е. регуляризующие свойства.

Метод (3) найдет практическое применение для решения задач акустики, синтеза антенн, спектроскопии, обратных задач гравиметрии и теории потенциала.

Список использованных источников

1. Савчук, В.Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф.Савчук, О.В.Матысик. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 196 с.