УДК 519.6+517.983.54

СХОДИМОСТЬ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ НОРМЕ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Р.Ю. Улезло*, 4 курс*
Научный руководитель – ***В.Ф. Савчук****, к.физ.-мат.н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С.Пушкина

В действительном гильбертовом пространстве *H* решается уравнение 1 рода

$$Ax = y \tag{1}$$

где *A* – ограниченный положительный самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением.

Однако нуль принадлежит спектру оператора *A*, поэтому задача (1) некорректна. Предположим, что при точной правой части *y* существует единственное решение *x* уравнения (1). Для отыскания решения уравнения (1) используем явный итерационный метод

$$x_{n+1} = (E - \alpha A)^2 x_n + 2\alpha y - \alpha^2 Ay, x_0 = 0 \tag{2}$$

В случае приближенной правой части $y_\delta : \|y - y_\delta\| \leq \delta$, метод (2) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = (E-\alpha A)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta - \alpha^2 A y_\delta, x_{0,\delta} = 0 \tag{3}$$

Для метода (3) изучен априорный выбор числа итераций в энергетической норме гильбертового пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$,где $x \in H$. Доказана сходимость метода при точной и приближенной правой части уравнения, и получены априорные оценки в энергетической норме. Справедлива теорема.

Теорема 1. При условии $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4M}$ итерационный процесс (3) сходится в энергетической норме гильбертового пространства, если выбрать число итераций *n* из условия $n^{1/2}\delta \to 0$ при $n \to \infty,\ \delta \to 0$.

Общая оценка погрешности для метода (3) в энергетической норме имеет вид

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \le (4n\alpha e)^{-1/2}\|x\| + [(35/27)n\alpha]^{1/2}\delta,\ n \ge 1 \tag{4}$$

Оптимизируем полученную оценку погрешности по *n*. Для этого при заданном δ найдем такое значение числа итераций *n*, при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по *n* от правой части неравенства (4), получим

$$n_{опт} = (35/27)^{-1/2}(2\alpha)^{-1} e^{-1/2}\delta^{-1}\|x\| \tag{5}$$

Подставив $n_{опт}$ в оценку (4), найдем ее оптимальное значение

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{опт} \le (35/25)^{1/4}(2\delta\|x\|)^{1/2} e^{-1/4} \tag{6}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. Оптимальная оценка погрешности для метода (3), при условии $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4M}$ в энергетической норме имеет вид (6) и получается при $n_{опт}$ из (5).

Замечание. Из неравенства (6) вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α. Но $n_{опт}$ зависит от α и, следовательно, для уменьшения $n_{опт}$ и, значит, объема вычислительной работы следует брать α возможно большим из условия $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4M}$ и так, чтобы $n_{опт}$ было целым.

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства *H*. Очевидно, для этого достаточно, чтобы при некотором фиксированном $\varepsilon\ (0 < \varepsilon < \|A\|)$ было $P_\varepsilon x = 0,\ P_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$ где $P_\varepsilon = \int_0^\varepsilon \lambda dE_\lambda$. Так как $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{2n}\right] y_\delta$, то для выполнения последнего из указанных условий должно выполняться условие $P_\varepsilon y_\delta = 0$. Таким образом, если решение *x* и приближенная правая часть y_δ таковы, что $P_\varepsilon x = 0$ и $P_\varepsilon y_\delta = 0$, то из сходимости $x_{n,\delta}$ к *x* в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства *H*, и, следовательно, для сходимости в исходной норме пространства *H* не требуется истокопредставимости точного решения.