УДК 519.6 + 517.983.54

НЕЯВНАЯ ПРОЦЕДУРА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С АПОСТЕРИОРНЫМ ВЫБОРОМ ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ

***Т.А. Шейко**, 5 курс*

*Научный руководитель – **О.В. Матысик**, к.физ.-мат.н., доцент*

Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

Проблема решения некорректных задач и разработки новых методов их решения весьма актуальна, поскольку такие задачи часто встречаются в многочисленных приложениях математики: гравиметрии, спектроскопии, математической экономике и т.д. Целью данной статьи является разработка и исследование неявной итерационной процедуры решения некорректных задач, описываемых операторными уравнениями I рода. Рассмотрим в гильбертовом пространстве H линейное операторное уравнение с положительным несамосопряженным ограниченным оператором А. Для решения (1) используем неявную итерационную процедуру.

$$Ax = y_\delta \tag{1}$$

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha^2 (A^*A)^2\right)^{-1}\left[(E - \alpha A^*A)^2 z_n + 2\alpha A^* y_\delta\right] + \left(E + \alpha^2 (A^*A)^2\right)^{-1}(E - \alpha A^*A)^2 u_n,\ z_0 \in H. \tag{2}$$

Здесь $\|y - y_\delta\| \le \delta,\ \alpha > 0,\ u_n$ – ошибки вычисления итераций, $\|u_n\| \le \beta$. Известно, что $0 \in SpA$, но не является его собственным значением. Поэтому задача отыскания решения уравнения является некорректной. Предполагается существование единственного решения *x* при точной правой части *y* уравнения (1).

Ниже, под сходимостью метода (2) понимается утверждение о том, что приближения (2) сколь угодно близко подходят к точному решению операторного уравнения (1) при достаточно малых δ и $n\delta$ и достаточно больших *n*.

Обозначим $C=\left(E+\alpha^2\left(A^*A\right)^2\right)^{-1}\left(E-\alpha A^*A\right)^2,\quad B=\left(E+\alpha^2\left(A^*A\right)^2\right)^{-1}2\alpha A^*.$

Определим момент m останова итерационного процесса условием

$$\|z_n-z_{n+1}\|>\varepsilon,(n<m),\quad \|z_m-z_{m+1}\|\le\varepsilon, \tag{3}$$

где ε – заданное до начала вычислений положительное число (уровень останова). Справедливы леммы.

Лемма 1. *Пусть приближение* ω_n *определяется равенствами*:

$$\omega_0=z_{0,}\ \ \omega_{n+1}=C\omega_n+By+Cu_n,\ \ n\ge 0,$$

тогда справедливо неравенство $\sum\limits_{k=0}^{n}\|\omega_k-\omega_{k+1}+Cu_k\|^2\le\|\omega_0-x\|^2+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2.$

Лемма 2. *При любом* $\omega_0\in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\|\le\beta$, *выполняется неравенство* $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\|\omega_n-\omega_{n+1}\|\le 2\|C\|\beta.$

Доказательство лемм 1 и 2 аналогично доказательству подобных лемм из [1, 2]. Леммы 1-2 используются при доказательстве следующей теоремы.

Теорема. *Пусть уровень останова* $\varepsilon=\varepsilon(\delta,\beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y-y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) если $\varepsilon(\delta,\beta)>2\|C\|\beta,$ *то момент останова* m *из* (3) *определен при любом начальном приближении* $z_0\in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y-y_\delta\|\le\delta,\ \|u_n\|\le\beta;$

б) если $\varepsilon(\delta,\beta)>\|B\|\delta+2\|C\|\beta,$ *то справедлива оценка*

$$m\le\frac{\|z_0-x\|^2}{\left(\varepsilon-\|B\|\delta-2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon-\|B\|\delta\right)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta)\to 0,\ \delta,\beta\to 0$ *и* $\varepsilon(\delta,\beta)\ge d\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)^p,$ *где* $d>1,\ p\in(0,\ 1),$ *то* $\lim\limits_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\|z_m-x\|=0$, *т.е. метод* (2) *сходится.*

Замечание. *Если номера останова m, зависящие от* $\varepsilon,\ y-y_\delta,\ \{u_n\},$ *не стремятся к* ∞ *при* $\varepsilon,\ \delta,\ \beta\to 0,$ *а окажутся ограниченными, то и в этом случае* $z_m\to x,\beta\to 0,\delta\to 0,\varepsilon\to 0$.

Список использованных источников

1. Емелин, И. В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.

2. Савчук, В.Ф. Об одном неявном итеративном методе решения операторных уравнений / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 4. – С. 38–42.