УДК 517.983+519.6

АПОСТЕРИОРНЫЙ ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

И.В. Юрко, *преподаватель-стажер*
Научный руководитель – ***В.Ф. Савчук****, к.физ.-мат.н., доцент*
Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина

Поскольку некорректные задачи возникают в многочисленных приложениях математики, то проблема их решения и разработка методов их решения является актуальной. В работе предлагается новый метод решения некорректных задач. Цель исследования – доказать сходимость предложенного метода в случае апостериорного выбора числа итераций, получить оценки погрешности и оценку момента останова. Методологической основой исследования является общая теория некорректных задач, элементы функционального и математического анализа, вычислительной математики.

В действительном гильбертовом пространстве H решается уравнение 1-го рода

$$Ax = y \tag{1}$$

где A – ограниченный несамосопряженный оператор, для которого нуль принадлежит спектру оператора A, но не является его собственным значением. Тогда задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если решение уравнения (1) существует, то будем искать его с помощью итерационного метода

$$x_{n+1} = \left(E - \alpha A^* A\right)^2 x_n + A^{-1}\left[E - (E - \alpha A^* A)^2\right] y,\ x_0 \in H. \tag{2}$$

Обычно правая часть уравнения (1) известна с некоторой точностью δ, т.е. известно y_δ такое, что $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Тогда метод (2) примет вид

$$z_{n+1} = (E - \alpha A^* A)^2 z_n + A^{-1}\left[E - (E - \alpha A^* A)^2\right] y_\delta + (E - \alpha A^* A)^2 u_n,\ z_0 \in H. \tag{3}$$

Здесь u_n – ошибки вычисления итераций, $\|u_n\| \le \beta$. Обозначим $C = (E - \alpha A^* A)^2,\ B = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A^* A)^2\right]$. Тогда метод (3) имеет вид

$$z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n. \tag{4}$$

Для метода (2) был рассмотрен априорный выбор числа итераций: доказана сходимость метода в исходной норме гильбертова пространства и получены оценки погрешности при точной и приближенной правой части уравнения. Для их получения потребовалось предположение, что точное решение уравнения (1) истокопредставимо. Если нет сведений об истокопредставимости точного решения, то затруднительно получить оценку погрешности и априорный момент останова. И тем не менее метод можно сделать эффективным, если воспользоваться правилом останова по соседним приближениям. Определим момент останова итерационной процедуры условием:

$$\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, (n < m); \|z_m - z_{m+1}\| \le \varepsilon.$$

Справедливы

Лемма 1. Пусть приближение w_n определяется равенствами

$$w_0 = z_0,\ w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n,\ n \ge 0, \tag{5}$$

тогда справедливы неравенства

$$\sum_{k=0}^{n} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2.$$

Лемма 2. При любом $w_0 \in H$ и произвольной последовательности ошибок $\{u_n\}$, удовлетворяющих условию $\|u_n\| \le \beta$, выполняется неравенство

$$\lim_{n \to \infty} \|w_n - w_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta \tag{6}$$

Обе леммы были использованы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема. Пусть уровень останова $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ выбирается как функция от уровней δ и β норм погрешностей $y - y_\delta$ и u_n. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$, то момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых y_δ и u_n, удовлетворяющих условиям $\|y - y_\delta\| \le \delta, \|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, то справедлива оценка

$$m < \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)};$$

в) если кроме того, $\varepsilon(\varepsilon, \beta) \to 0$, $\delta, \beta \to 0$, и $\varepsilon(\delta, \beta) \ge d(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p)$, где $d > 1, p \in (0,1)$, то $\lim\limits_{\substack{\delta \to 0 \\ \beta \to 0}} \|z_m - x\| = 0$.

В теореме обоснована возможность применения правила останова по соседним приближениям к методу (3) и получена оценка для момента останова. Показано, что приближенное решение метода z_m, полученное с использованием правила останова по соседним приближениям, сходится к точному решению x уравнения (1).

Список использованных источников

1. Савчук, В.Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф.Савчук, О.В.Матысик. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. - 196 с.