УДК 517.62

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ПОЛНОГО ПРОГНОЗА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДУФФИНГА

***Н.Л. Зинович**, 5 курс*
Научный руководитель ***– В.М. Мадорский**, к.физ.-мат.н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

Рассмотрим краевую задачу для нелинейного уравнения второго порядка

$$x'' + \alpha x' + \beta x^m + \gamma |x| = F(\sin t, \cos t) \qquad (1)$$

$$x(a)=\alpha, \quad x(b)=\beta$$

с краевыми условиями первого рода. Введем на отрезке [a,b] сетку $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b$. Проблемой этой задачи является наличие модуля, поскольку модуль не дифференцируем. Для решения задачи будем использовать модификацию метода Канторовича-Красносельского. Заменим задачу её сеточным аналогом:

$$\frac{x_{k+1}-2x_k+x_{k-1}}{h^2}+\alpha\frac{x_{k+1}-x_{k-1}}{2h}+\beta x_k^m+\gamma|x_k| = F(\sin t_k, \cos t_k) \quad k=\overline{1,n-1}$$

Воспользуемся вспомогательной функцией, которая не содержит модуль:

$$\frac{x_{k+1}-2x_k+x_{k-1}}{h^2}+\alpha\frac{x_{k+1}-x_{k-1}}{2h}+\beta x_k^m+\gamma x_k = f(x_k) \quad k=\overline{1,n-1}$$

Для каждого узла сетки составим разностное уравнение, причем в крайних узлах $x_0 = a, \quad x_N = b$ используем краевые условия. В результате получим две нелинейные системы, состоящие из N+1 нелинейных уравнений. Исходную задачу запишем в операторном виде:

F(x)=0

и введем эквивалентную замену:

F(x)=f(x)+ F(x) - f(x)= f(x)+ g(x)=0

Полученная система решается с помощью нелокальных регуляризованных квазиньютоновских итерационных процессов[1, с.59-61]. Предлагаемый процесс состоит из 4 этапов:

Этап 1. Решается линейное уравнение относительно Δx_n:

$$\left(\alpha\beta_n\|f(x_n)\|^2 E+\overline{f'(x_n)}f'(x_n)\right)\Delta x_n = -\overline{f'(x_n)}(f(x_n)+g(x_n)), \quad \alpha\in\left[10^{-6};10^{-3}\right], \ \beta_0\in\left[10^{-4};10^{-1}\right]$$

Этап 2. Вносится поправка в вектор x_n:

$$x_{n+1}=x_n+\beta_n\Delta x_n, \ n=0,1,2,\ldots, \ \beta_0\in[10^{-3},10^{-1}]$$

Этап 3. Если $\|f(x_{n+1})+g(x_{n+1})\|<\varepsilon$, где ε – малая величина (параметр останова), то конец просчётов, иначе переход на шаг 4.

Этап 4. Определяется новая шаговая длина: если $\|f(x_{n+1})+g(x_{n+1})\|<\|f(x_n)+g(x_n)\|$, то $\beta_{n+1}=1$, иначе пересчет β_{n+1} по указанным ниже формулам и переход на этап 1.

На этапе 1 нами решается СЛАУ с пятидиагональной матрицей с помощью пятдиагональной матричной прогонки, что позволяет очень быстро решать такие СЛАУ.

Решение системы является приближенным решением краевой задачи (1) в соответствующих узлах сетки.

Метод 1(Ермакова-Калиткина):

$$\beta_n=\max\left(\theta,\frac{\|f(x_n)\|^2}{\|f(x_n)\|^2+\|f(x_n+\Delta x_n)\|^2}\right), \quad \beta_{-1}\in[10^{-3},1], \theta\in[10^{-2},10^{-1}]$$

Метод 2:

$$\beta_n=\min\left(1,\frac{\gamma_n\|f(x_n)\|^2}{\beta_{-1}(\|f(x_n)\|^2+\|f(x_n+\Delta x_n)\|)}\right), \quad \beta_{-1}\in[10^{-3},1], \beta_0=\beta_{-1}$$

$$\gamma_{n+1}=\frac{\gamma_n\|f(x_n)\|^4(\|f(x_{n+1})\|^2+\|f(x_{n+1}+\Delta x_{n+1})\|^2)}{\|f(x_{n+1})\|^4(\|f(x_n)\|^2+\|f(x_n+\Delta x_n)\|^2)}$$

$$\gamma_0=\beta_0^2\frac{\|f(x_0)\|^2+\|f(x_1)\|^2}{\|f(x_1)\|^2}$$

Метод 3:

$$\beta_n = \min(1, \frac{\gamma_n}{\delta \beta_{n-1} \| f(x_n + \Delta x_n) \|}), \quad 1 < \delta \le 2,$$

$$\gamma_{n+1} = (1 - \beta_n)\gamma_n + \beta_n^2 \beta_{n-1} \| f(x_n + \Delta x_n) \|, \gamma_0 = \lambda \| f(x_0) \|, \lambda << 1$$

<u>Метод 4:</u>

$$\beta_n = \min(1, \frac{\gamma_n}{\gamma_n + \beta_{n-1} \| f(x_n + \Delta x_n) \|^2}),$$

$$\gamma_{n+1} = (1 - 2\beta_n)\gamma_n + \beta_n^2 (\gamma_n + \beta_{n-1} \| f(x_n + \Delta x_n) \|^2), \gamma_0 = \lambda \| f(x_0) \|^2, \lambda << 1$$

Численные эксперименты при решении уравнения (1) позволяют сделать следующие выводы:

Методы полного прогноза являются достаточно эффективными и позволяют найти решение за разумное количество итераций даже в случае случайного начального вектора. Рассмотренных методы оказались примерно одинаково эффективными как по количеству итераций, так и по точности решения. Метод Н.Н. Калиткина [2, с.491] не доказан для больших значений параметра β, который участвует в решении сеточной задачи. Остальные методы не обладают этим недостатком.

Рассмотрим непериодический случай с краевыми условиями I рода:

$$y'' + 0.2y' + |y| + y^3 = 50\cos(x), \qquad y(0) = 1.58, \quad y(2\pi) = 1.58$$

Результаты просчетов сведены в таблицу

Таблица – Количество итераций, точность решения и размерность сеточной задачи

	Метод 1	Метод 2	Метод3	Метод 4
100				
итер.	20	22	21	23
точн	7,5E-12	1,28E-11	3,19E-11	1,22E-12
200				
итер.	23	24	25	26
точн	2,86E-12	4,13E-12	3,76E-12	4,84E-12
384				
итер.	27	29	29	31
точн	6,77E-11	4,33E-11	5,64E-12	3,12E-11
512				
итер.	34	31	36	35
точн	3,95E-11	9,59E-11	3.20E-11	3,24E-11

Список используемых источников

1. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М.Мадорский. – Брест: БрГУ, 2005.- 186с.

2. Ермаков, В.В. Оптимальный шаг и регуляризация в методе Ньютона/ В.В.Ермаков, Н.Н. Калиткин // Вычисл. матем и матем. физ. -1981.-№2-с.491-497