Национальный банк Республики Беларусь
УО «Полесский государственный университет»

П.А. ПАВЛОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Учебно-методическое пособие
для студентов нематематических специальностей
всех форм обучения

Пинск
ПолесГУ
2011

УДК 22.18я73
ББК 519.85(075.8)
П 12

Р е ц е н з е н т ы :
кандидат физико-математических наук, доцент Э.В. Мусафиров;
кандидат физико-математических наук М.А. Романова

У т в е р ж д е н о
научно-методическим советом ПолесГУ

Павлов, П.А.
П12 Высшая математика. Математическое программирование: учеб.-метод. пособие / П.А. Павлов. – Пинск: ПолесГУ, 2011. – 78 с.

ISBN 978-985-516-163-0

Содержит теоретические сведения по следующим разделам математического программирования: линейное программирование, двойственность в линейном программировании, транспортная задача, целочисленное программирование, динамическое и нелинейное программирование. Может быть использовано для самостоятельной работы студентов.

Предназначено для студентов нематематических специальностей всех форм обучения, а также для слушателей факультета повышения квалификации и переподготовки кадров.

УДК 22.18я73
ББК 519.85(075.8)

ISBN 978-985-516-163-0

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математическое программирование (МП) – это область прикладной математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, т.е. задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Экономико–математическая модель (ЭММ) – это система математических функций, уравнений, неравенств и т.д., описывающих реальный экономический объект, составляющие его характеристики и взаимосвязи между ними.

Модель задачи МП можно записать в виде:

$$\max(\min) F = f(x_1, x_2, ..., x_n), \quad (1)$$

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n)\{\le, =, \ge\} b_i, \ i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3)$$

(1) – целевая функция (ЦФ) (показатель эффективности, критерий оптимальности). В качестве ЦФ может быть прибыль, объем выпуска или реализации, затраты производства, издержки обращения, отходы и т.д.

(2) – основные, (3) – прямые ограничения. Математически ограничения записываются в виде уравнений и неравенств, совокупность которых образует **область допустимых решений** (ОДР) (область экономических возможностей).

Совокупность неизвестных величин $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, действуя на которые систему можно совершенствовать, будем называть **планом** задачи (решением, управлением, стратегией и др.).

План *X***,** удовлетворяющий основным (2) и прямым (3) ограничениям задачи, называется **допустимым**.

Допустимый план, доставляющий ЦФ экстремальное значение, называется **оптимальным** и обозначается X^*.

Экстремальное значение целевой функции обозначается $F^* = f(X^*) = \max(\min) F$.

В зависимости от свойств функций f и φ_i, $i = \overline{1,m}$, МП можно рассматривать как ряд самостоятельных дисциплин, занимающихся изучением и разработкой методов решения отдельных классов задач.

Прежде всего, задачи математического программирования делятся на задачи **линейного** (если все функций f и φ_i, $i = \overline{1,m}$, линейные) и **нелинейного** (если хотя бы одна из указанных функций нелинейная) программирования.

Среди задач нелинейного программирования наиболее глубоко изучены задачи **выпуклого** программирования, в результате решения которых определяется минимум выпуклой (максимум вогнутой) функции, заданной на выпуклом замкнутом множестве.

Отдельными классами задач МП являются задачи **целочисленного**, **параметрического** и **дробно–линейного** программирования.

В задачах целочисленного программирования на искомые переменные налагается условие целочисленности, а область допустимых решений конечна. В задачах параметрического программирования ЦФ или функции, определяющие ОДР, либо то и другое, зависят от некоторых параметров. В задачах дробно–линейного программирования ЦФ представляет собой отношение двух линейных функций, а функции, определяющие область возможных изменений переменных, также являются линейными.

Выделяют отдельные классы задач **стохастического** и **динамического** программирования.

Если в ЦФ или в функциях, определяющих область экономических возможностей, содержатся случайные величины, то такие задачи относятся к задачам стохастического программирования.

Задачи, процесс нахождения решения которых является многошаговым, относятся к задачам динамического программирования.

1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ (ЛП)

1.1. Примеры экономических задач ЛП

ЛП – это раздел МП, в котором разрабатываются методы отыскания экстремума линейных функций многих переменных при линейных дополнительных ограничениях, налагаемых на эти переменные.

Задача о наилучшем использовании ресурсов. Пусть производится n видов продукции, при этом используется m ресурсов.

Известны следующие параметры: c_j, $j=\overline{1,n}$ – цена единицы продукции j–го вида; b_i, $i=\overline{1,m}$ – имеющееся количество i–го ресурса; a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ – расход i–го ресурса для производства единицы продукции j–го вида.

Требуется определить план производства каждого вида продукции $X^*=(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, при котором обеспечивается максимальная стоимость всей продукции при имеющихся ресурсах.

Так как c_j – цена единицы продукции j–го вида, то цена x_j единиц будет равна $c_j x_j$, а общая стоимость всех n видов продукции составит:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j .$$

Так как a_{ij} – расход i–го ресурса на производство единицы продукции j–го вида, то расход на производство x_j единиц будет равен $a_{ij}x_j$, а расход на выпуск всех n видов продукции, который не должен превышать b_i, составит:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \; i=\overline{1,m}.$$

Чтобы искомый план производства был реален, нужно на объемы выпуска продукции наложить условие неотрицательности, т.е. $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$.

Таким образом, ЭММ задачи о наилучшем использовании ресурсов примет вид:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ \ i = \overline{1,m},$$
$$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,n}.$$

Задача о диете (о рационе). Пусть имеется n продуктов питания, в которых содержится m полезных веществ.

Известны следующие параметры: $c_j,\ j = \overline{1,n}$ – цена единицы j–го продукта; $b_i,\ i = \overline{1,m}$ – минимальное количество i–го полезного вещества, которое должно потребляться за определенный промежуток времени; $a_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$ – содержание i–го полезного вещества в единице j–го продукта.

Требуется определить количество приобретения продуктов каждого вида $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, обеспечивающее необходимое количество полезных веществ при минимальной общей стоимости продуктов питания.

Если c_j – цена единицы j–го продукта, то цена x_j единиц будет равна $c_j x_j$, а общая стоимость всех n продуктов питания составит:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j .$$

Если a_{ij} – содержание i–го полезного вещества в единице j–го продукта, то содержание в x_j единиц будет равно $a_{ij} x_j$, а содержание в n продуктах питания, которое должно быть не меньше b_i, равно:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = \overline{1,m}.$$

ЭММ задачи о диете будет иметь вид:

$$\min F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = \overline{1,m},$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

1.2. Формы записи задачи ЛП

Общей задачей называют задачу вида:

$$\max(\min) F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1,m_1},$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{m_1+1,m_2},$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = \overline{m_2+1,m},$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n_1},$$
$$x_j - \textit{произвольные}, \quad j = \overline{n_1+1,n}.$$

Симметричная форма записи задачи ЛП имеет вид:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \qquad \min F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1,m}, \quad \text{или} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = \overline{1,m},$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \qquad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Канонической формой записи задачи называют задачу:

$$\max(\min) F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \,, \tag{1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}\,, \tag{1.2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}\,. \tag{1.3}$$

Рассмотрим еще два вида записи – **матричную** и **векторную**. Для этого введем обозначения:

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Тогда каноническая задача запишется следующим образом:

$$\max F = [c_1 \;\; c_2 \;\; \dots c_n][x_1 \;\; x_2 \;\; \dots x_n]^T,$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}, \qquad \text{или} \qquad \begin{aligned} &\max F = CX, \\ &AX = B, \\ &X \ge 0. \end{aligned}$$
$$X \ge 0,$$

Для того, чтобы записать векторную форму записи задачи, для столбцов матрицы A введем обозначения:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \; A_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Тогда задача (1.1)–(1.3) запишется в виде:

$$\max F = CX,$$
$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = B,$$
$$X \geq 0.$$

Способы преобразования.

При необходимости задачу минимизации можно заменить задачей максимизации, и наоборот. Для функции одной переменной это утверждение очевидно. Если x^* – точка минимума функции $y = f(x)$, то для функции $y = -f(x)$ она будет являться точкой максимума. Тогда, $\min f(x^*) = -\max(-f(x^*))$. То же самое имеет место и в случае функции n переменных.

Пусть исходная задача ЛП имеет вид:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{1.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m_1}, \tag{1.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = \overline{m_1 + 1, m}, \tag{1.6}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{1.7}$$

Преобразуем ее к каноническому виду. Для этого введем m дополнительных (балансовых) неотрицательных переменных $x_{n+i} \geq 0$, $i = \overline{1, m}$. Для того чтобы неравенства (1.5) преобразовать в равенства к их левым частям прибавим дополнительные переменные $x_{n+i} \geq 0$, $i = \overline{1, m_1}$, а для преобразования неравенств (1.6) в равенства из их левых частей вычтем дополнительные переменные $x_{n+i} \geq 0$, $i = \overline{m_1 + 1, m}$, после чего системы неравенств (1.5) и (1.6) примут вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = \overline{1, m_1}, \tag{1.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i, \ \ i = \overline{m_1 + 1, m}. \tag{1.9}$$

Систему уравнений (1.8), (1.9) с условиями неотрицательности дополнительных переменных называют **эквивалентной** системе неравенств (1.5), (1.6).

Дополнительные переменные $x_{n+i} \geq 0$, $i = \overline{1, m}$, в ЦФ (1.4) вводятся с коэффициентами равными нулю, т.е. $c_{n+i} = 0$, $i = \overline{1, m}$.

После всех преобразований получим задачу в канонической форме вида:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} 0 x_{n+i}, \tag{1.10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \ \ i = \overline{1, m_1}, \tag{1.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i, \ \ i = \overline{m_1 + 1, m}, \tag{1.12}$$

$$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1, n}, \ \ x_{n+i} \geq 0, \ \ i = \overline{1, m}. \tag{1.13}$$

Теорема. *Каждому допустимому решению* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *задачи (1.4)–(1.7) соответствует вполне определенное допустимое решение* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, x_{n+1}^0, \ldots, x_{n+m}^0)$ *задачи (1.10)–(1.13), где* $x_{n+i} \geq 0$, $i = \overline{1, m}$, *и наоборот, каждому допустимому решению* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, x_{n+1}^0, \ldots, x_{n+m}^0)$ *задачи (1.10)–(1.13) соответствует допустимое решение* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *задачи (1.4)–(1.7).*

Доказательство. Пусть $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ – допустимое решение задачи (1.4)–(1.7). Для условий (1.5) обозначим

$$x_{n+i}^0 = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 \geq 0, \ \ i = \overline{1, m_1}, \tag{1.14}$$

а для (1.6)

$$x_{n+i}^0 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 - b_i \geq 0, \ \ i = \overline{m_1 + 1, m}. \qquad (1.15)$$

Из условий (1.14) и (1.15) следуют условия (1.11) и (1.12). Отсюда $(x_1{}^0, x_2{}^0, \ldots, x_n{}^0, x_{n+1}{}^0, \ldots, x_{n+m}^0)$ есть определенное допустимое решение задачи (1.10)–(1.13). Аналогично доказывается обратное утверждение.

.■.

Так как дополнительные переменные $x_{n+i} \geq 0$, $i = \overline{1, m}$, входят в ЦФ (1.10) с коэффициентами, равными нулю, то значения ЦФ (1.4) и (1.10) при соответствующих допустимых решениях одинаковы. Отсюда следует, что данные ЦФ на множестве соответствующих допустимых решений достигают экстремального значения одновременно. Оптимальному решению задачи (1.4)–(1.7) соответствует оптимальное решение задачи (1.10)–(1.13), т.е. исходная задача и ее каноническая форма эквивалентны.

Переход к симметричной форме записи можно осуществить двумя способами.

Первый способ. Пусть в общей задаче ЛП имеются ограничения–равенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$. Каждое такое ограничение–равенство эквивалентно системе неравенств:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i.$$

Неравенство вида “≥” умножением обеих частей на -1 превращается в неравенство вида “≤”, и наоборот.

Второй способ. Рассмотрим задачу ЛП в каноническом форме (1.1–1.3). Приведем ее к симметричной форме.

Например, методом исключений Гаусса систему (1.2) можно преобразовать к виду:

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i, \quad i = \overline{1,m}. \tag{1.16}$$

Если ранг системы (1.16) равен m и $m < n$, то система будет иметь бесконечное множество решений. Не ограничивая общности будем считать, что в матрице системы линейно–независимы первые m столбцов.

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$ называются **базисными (БП)**, а $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ – **свободными (СП).**

Выразим ЦФ через свободные переменные. Для этого подставим значения БП x_i, $i = \overline{1,m}$, из (1.16) в (1.1), получим:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_m x_m + c_{m+1} x_{m+1} + \ldots + c_n x_n =$$
$$= c_1(\beta_1 - \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{1j} x_j) + c_2(\beta_2 - \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{2j} x_j) + \ldots + c_m(\beta_m - \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{mj} x_j) +$$
$$+ c_{m+1} x_{m+1} + \ldots + c_n x_n = (c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \ldots + c_m\beta_m) -$$
$$-[((c_1\alpha_{1,m+1} + c_2\alpha_{2,m+1} + \ldots + c_m\alpha_{m,m+1}) - c_{m+1}) x_{m+1} +$$
$$+ ((c_1\alpha_{1,m+2} + c_2\alpha_{2,m+2} + \ldots + c_m\alpha_{m,m+2}) - c_{m+2}) x_{m+2} + \ldots +$$
$$+ ((c_1\alpha_{1,n} + c_2\alpha_{2,n} + \ldots + c_m\alpha_{m,n}) - c_n) x_n)].$$

Введем обозначения: $c_Б$ – вектор коэффициентов ЦФ, стоящих при базисных переменных, β – вектор свободных членов в (1.16), A_{m+k}, $k = \overline{1, n-m}$ – векторы коэффициентов при свободных переменных, тогда:

$$c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \ldots + c_m\beta_m = c_Б\beta = \Delta_0,$$
$$(c_1\alpha_{1,m+1} + c_2\alpha_{2,m+1} + \ldots + c_m\alpha_{m,m+1}) - c_{m+1} = c_Б A_{m+1} - c_{m+1} = \Delta_{m+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(c_1\alpha_{1,n} + c_2\alpha_{2,n} + \ldots + c_m\alpha_{m,n}) - c_n = c_Б A_n - c_n = \Delta_n.$$

Используя эти обозначения, получаем, что $F = \Delta_0 - \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j$. Так как $x_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$, то из равенства (1.16) имеем, что $\sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j \leq \beta_i$, $i = \overline{1,m}$.

Таким образом, модель задачи примет симметричный вид:

$$\max F = \Delta_0 - \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j,$$

$$\sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j \leq \beta_i, \quad i = \overline{1,m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{m+1,n}.$$

Отметим, что в любом случае при подстановке базисных переменных в ЦФ справедлива формула:

$$F = \Delta_0 - \sum_{j=1}^{n} \Delta_j x_j,$$

где $\Delta_0 = c_Б \beta$, $\Delta_j = c_Б A_j - c_j$, $j = \overline{1,n}$.

Последние формулы используют для контроля вычислений при решении задачи ЛП симплексным методом.

В ряде производственно–экономических ситуаций не на все переменные налагаются условия неотрицательности. В таких случаях, каждую из переменных x_k, на которую не наложено условие неотрицательности, заменяют разностью двух неотрицательных переменных x_k' и x_k'', т.е. $x_k = x_k' - x_k''$, где $x_k' \geq 0$, $x_k'' \geq 0$.

1.3. Графический метод решения задачи ЛП

Рассмотрим задачу ЛП с двумя переменными:

$$\max(\min) F = c_1 x_1 + c_2 x_2, \qquad (1.17)$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \{\le, =, \ge\} b_i, \quad i = \overline{1, m}, \qquad (1.18)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}. \qquad (1.19)$$

Дадим геометрическую интерпретацию элементов этой задачи.

Каждое из ограничений (1.18) и (1.19) задает на плоскости $x_1 O x_2$ некоторую полуплоскость. Полуплоскость – выпуклое множество. Пересечение любого числа выпуклых множеств является выпуклым множеством. Отсюда следует, что ОДР задачи (1.17)–(1.19) является выпуклое множество. Отметим, что областью допустимых решений может быть выпуклый многоугольник, неограниченная выпуклая многоугольная область, единственная точка, прямая линия, луч, отрезок, пустое множество.

Перейдем к геометрической интерпретации ЦФ. Пусть областью допустимых решений является многоугольник $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ (рис.1.1).

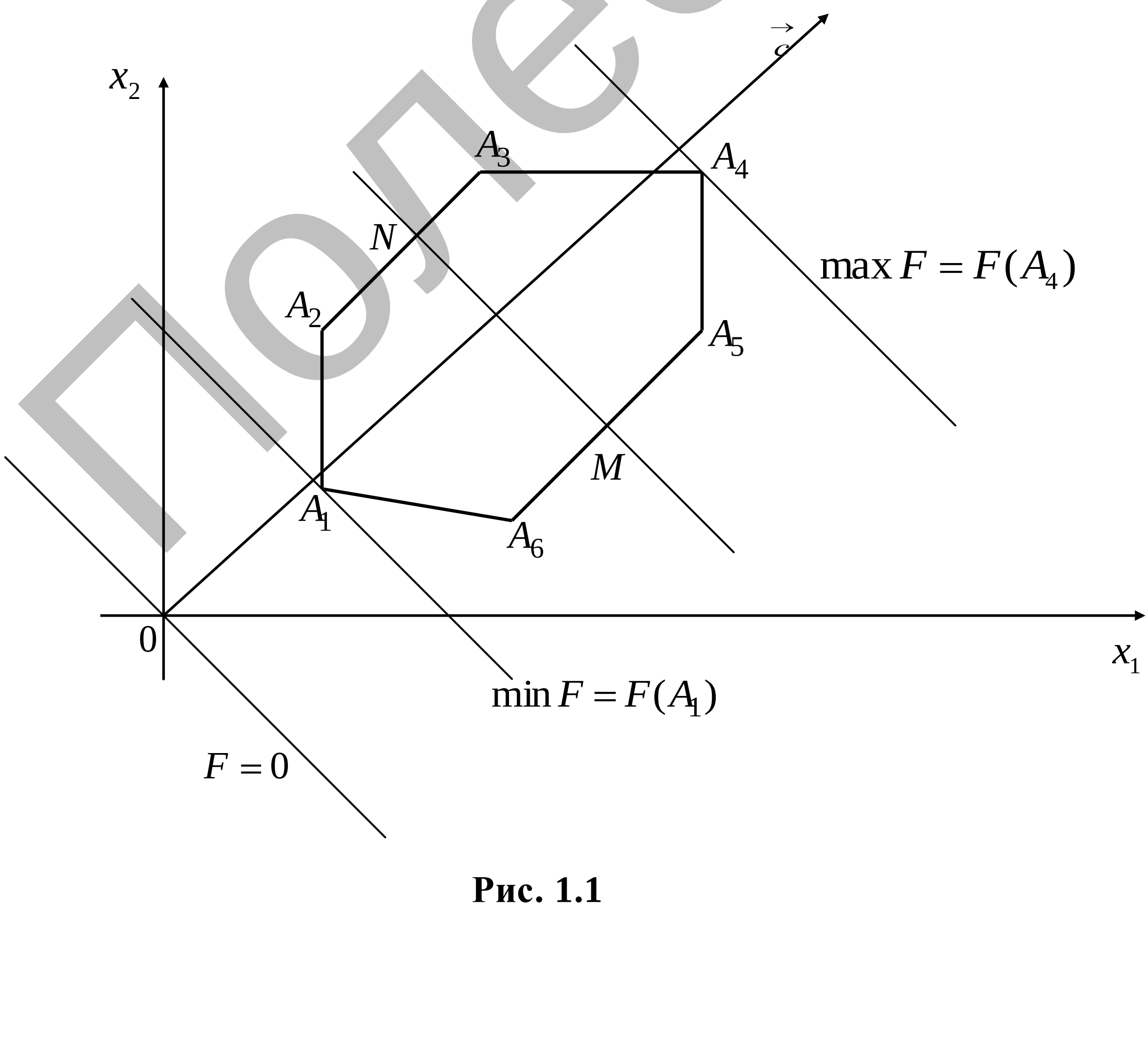

Рис. 1.1

Выберем произвольное значение $F = F_0$. Получим $c_1x_1 + c_2x_2 = F_0$, а это уравнение прямой линии. В точках прямой NM ЦФ сохраняет одно и тоже постоянное значение F_0. Считая в (1.17) F параметром, получим уравнение семейства параллельных прямых, называемых **линиями уровня ЦФ (линиями постоянного значения)**.

Для того, чтобы установить направление возрастания (убывания) ЦФ, найдем частные производные ЦФ по x_1 и x_2: $\frac{\partial F}{\partial x_1} = c_1$, $\frac{\partial F}{\partial x_2} = c_2$. Частные производные ЦФ c_1 и c_2 показывают скорость ее возрастания вдоль осей Ox_1 и Ox_2 соответственно.

Вектор $\vec{c} = (c_1, c_2)$ называется **градиентом** функции и показывает направление наискорейшего возрастания.

Вектор $-\vec{c} = (-\partial F / \partial x_1, -\partial F / \partial x_2) = (-c_1, -c_2)$ называется **антиградиентом** функции и показывает направление наискорейшего убывания.

Векторы $\vec{c}$ и $-\vec{c}$ **перпендикулярны** прямым $F = const$ семейства $c_1x_1 + c_2x_2 = F$.

Из геометрической интерпретации следует **графический метод решения**:

1. С учетом системы ограничений строим область допустимых решений.
2. Строим вектор $\vec{c}$ наискорейшего возрастания ЦФ – вектор градиентного направления.
3. Проводим произвольную линию уровня $F = F_0$ (проще провести $F = 0$), перпендикулярную к вектору $\vec{c}$.
4. При решении задачи на максимум перемещаем линию уровня $F = F_0$ в направлении вектора $\vec{c}$ так, чтобы она касалась ОДР в ее крайней точке. В случае решения задачи на минимум линию уровня перемещаем в антиградиентном направлении.
5. Определяем оптимальный план $X^* = (x_1^*; x_2^*)$ и экстремальное значение ЦФ $F^* = f(X^*)$.

1.4. Свойства решений задачи ЛП

Рассмотрим задачу ЛП в векторном виде:

$$\max F = CX,$$
$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B,$$
$$X \geq 0.$$

Будем считать, что базис составляют первые m векторов $A_1, A_2, ..., A_m$. Этому базису соответствуют БП $x_1, x_2, ..., x_m$, а переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ будут являться свободными.

Теорема. *Если система векторов $A_1, A_2, ..., A_n$ содержит m линейно–независимых векторов $A_1, A_2, ..., A_m$, то допустимое решение вида*

$$X = (x_1, x_2, ..., x_m, 0, ..., 0), \quad x_j > 0, \quad j = \overline{1, m}, \tag{1.20}$$

является крайней точкой многогранника решений.

Доказательство. Т.к. векторы $A_1, A_2, ..., A_m$ линейно–независимы, то вектор B может быть выражен через них единственным образом:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_mx_m = B. \tag{1.21}$$

Предположим, что точка (1.20) не является крайней. Тогда ее можно представить как выпуклую линейную комбинацию двух других различных крайних точек X_1 и X_2 многогранника решений:

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, \text{ где } \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \tag{1.22}$$

$$X_1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_m^1, x_{m+1}^1, ..., x_n^1), \quad X_2 = (x_1^2, x_2^2, ..., x_m^2, x_{m+1}^2, ..., x_n^2).$$

Подставив в (1.22) координаты точек, получим:

$$(x_1, x_2, ..., x_m, 0, ..., 0) =$$
$$= \lambda_1(x_1^1, x_2^1, ..., x_m^1, x_{m+1}^1, ..., x_n^1) + \lambda_2(x_1^2, x_2^2, ..., x_m^2, x_{m+1}^2, ..., x_n^2).$$

Отсюда:

$$x_1 = \lambda_1 x_1^1 + \lambda_2 x_1^2,\ \ x_2 = \lambda_1 x_2^1 + \lambda_2 x_2^2,\ \ \ldots,\ \ x_m = \lambda_1 x_m^1 + \lambda_2 x_m^2,$$
$$x_{m+1} = \lambda_1 x_{m+1}^1 + \lambda_2 x_{m+1}^2 = 0,\ \ \ldots,\ \ x_n = \lambda_1 x_n^1 + \lambda_2 x_n^2 = 0.$$

Так как $x_j > 0$, $j = \overline{1,m}$, и $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, то тогда следует, что $x_j^1 > 0$ и $x_j^2 > 0$, $j = \overline{1,m}$. Так как $x_j = 0$, $j = \overline{m+1,n}$, и $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, тогда $x_j^1 = 0$ и $x_j^2 = 0$, $j = \overline{m+1,n}$. Получили, что точки X_1 и X_2 имеют такую же структуру, что и точка *X*, т.е.

$$X_1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_m^1, 0, ..., 0),\ X_2 = (x_1^2, x_2^2, ..., x_m^2, 0, ..., 0). \qquad (1.23)$$

Поскольку (1.23) допустимые решения, то они должны удовлетворять векторному равенству (1.21):

$$A_1 x_1{}^1 + A_2 x_2{}^1 + ... + A_m x_m{}^1 = B,$$
$$A_1 x_1{}^2 + A_2 x_2{}^2 + ... + A_m x_m{}^2 = B.$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим:

$$A_1(x_1{}^1 - x_1{}^2) + A_2(x_2{}^1 - x_2{}^2) + ... + A_m(x_m{}^1 - x_m{}^2) = 0. \qquad (1.24)$$

Т.к. векторы $A_1, A_2, ..., A_m$ – линейно–независимы, то равенство (1.24) выполняется когда $x_1{}^1 = x_1{}^2$, $x_2{}^1 = x_2{}^2$, …, $x_m{}^1 = x_m{}^2$, т.е. $X_1 = X_2$.

Пришли к противоречию. Точку *X* невозможно представить как выпуклую линейную комбинацию двух различных точек многогранника решений. Следовательно, точка *X* – крайняя точка многогранника решений.

.■.

Теорема (основная теорема ЛП). *Если задача ЛП имеет решение, то ЦФ достигает экстремального значения хотя бы в одной из крайних точек многогранника решений. Если же ЦФ достигает экстремального значения более чем в одной крайней точке, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся их выпуклой линейной комбинацией.*

Доказательство. Пусть X^* допустимое решение, в котором ЦФ достигает своего, например, максимального значения, т.е. $f(X^*) = \max F$. Тогда

$$f(X^*) \geq f(X\ \ ),\ X \in \Omega, \tag{1.25}$$

где Ω – область допустимых решений.

Если X^* совпадает с одной из крайних точек, то первая часть теоремы доказана.

Предположим, что X^* не является крайней точкой многогранника решений. Тогда ее можно представить в виде выпуклой линейной комбинации крайних точек $X_1, X_2, ..., X_k$:

$$X^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i,\ \lambda_i > 0,\ \ i = \overline{1,k},\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

В силу линейности функции f имеем:

$$f(X^*) = \lambda_1 f(X_1) + \lambda_2 f(X_2) + ... + \lambda_k f(X_k). \tag{1.26}$$

Обозначим через M максимальное значение ЦФ среди всех крайних точек, т.е.

$$M = \max(f(X_1), f(X_2), ..., f(X_k)). \tag{1.27}$$

Из равенства (1.26) в силу условия (1.27) имеем:

$$f(X^*) \leq \lambda_1 M + \lambda_2 M + ... + \lambda_k M = M\text{, или } f(X^*) \leq M. \tag{1.28}$$

Из неравенств (1.25) и (1.28) приходится сделать единственный вывод, что $f(X^*) = M$. Но M – значение ЦФ в одной из крайних точек, поэтому X^* совпадает с одной из них. Первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части теоремы допустим, что функция f достигает максимального значения более чем в одной крайней точке, например в точках $X_1, X_2, ..., X_k$, т.е.

$$f(X_1) = f(X_2) = ... = f(X_k) = M. \qquad (1.29)$$

Составим выпуклую линейную комбинацию этих точек:

$$X = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i, \ \lambda_i > 0, \ i = \overline{1,k}, \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

Учитывая условие (1.29) и линейность функции f, получим:

$$f(X) = \lambda_1 f(X_1) + \lambda_2 f(X_2) + ... + \lambda_m f(X_m) =$$
$$= \lambda_1 M + \lambda_2 M + ... + \lambda_m M = M,$$

т.е. линейная функция f принимает максимальное значение в произвольной точке X, являющейся выпуклой линейной комбинацией точек $X_1, X_2, ..., X_k$, в которых ЦФ принимает максимальное значение.

.■.

1.5. Симплексный метод

Построение начального опорного плана. Пусть задача ЛП представлена системой ограничений в каноническом виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ b_i \ge 0, \ i = \overline{1,m}.$$

Говорят, что ограничение–равенство имеет **предпочтительный вид**, если при неотрицательной правой части левая часть содержит переменную с коэффициентом равным единице, а в остальные ограничения эта переменная входит с коэффициентом равным нулю.

Система ограничений имеет **предпочтительный вид**, если каждое ограничение–равенство имеет предпочтительный вид.

В этом случае легко найти ее **опорное** решение (базисное с неотрицательными координатами) для этого все СП нужно приравнять нулю, а предпочтительные переменные (базисные) свободным членам.

Пусть система ограничений имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\,,\ b_i \ge 0\,,\ i=\overline{1,m}.$$

Сведем задачу к каноническому виду. Для этого добавим к левым частям неравенств дополнительные неотрицательные переменные $x_{n+i} \ge 0$, $i=\overline{1,m}$. Получим систему, эквивалентную исходной $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,\ b_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}$, которая имеет предпочтительный вид. И, следовательно, начальный опорный план запишется в виде: $X_0 = (\underbrace{0,\ 0,\ ...,\ 0}_{n},\ \underbrace{b_1,\ b_2,\ ...,\ b_m}_{m})$. В ЦФ, как отмечалось выше, дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю, т.е. $c_{n+i}=0,\ i=\overline{1,m}$.

Признак оптимальности опорного плана. Симплексная таблица. Задачу ЛП, как было показано выше, можно преобразовать к виду:

$$\max(\min) F = \Delta_0 - \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j\,, \tag{1.30}$$

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij}x_j = \beta_i,\ i=\overline{1,m}, \tag{1.31}$$

$$x_j \ge 0,\ \ j=\overline{1,n}. \tag{1.32}$$

где $\Delta_0 = c_Б \beta$, $\Delta_j = c_Б A_j - c_j$, $j = \overline{1, n}$.

Для решения задачу (1.30)–(1.32) записывают в **симплексную** таблицу:

БП	1	СП			
		$-x_{m+1}$	$-x_{m+2}$	$\ldots$	$-x_n$
$x_1 =$	β_1	$\alpha_{1,m+1}$	$\alpha_{1,m+2}$	$\ldots$	$\alpha_{1,n}$
$x_2 =$	β_2	$\alpha_{2,m+1}$	$\alpha_{2,m+2}$	$\ldots$	$\alpha_{2,n}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$x_m =$	β_m	$\alpha_{m,m+1}$	$\alpha_{m,m+2}$	$\ldots$	$\alpha_{m,n}$
F	Δ_0	Δ_{m+1}	Δ_{m+2}	$\ldots$	Δ_n

Последнюю строку называют **индексной строкой (строкой ЦФ)**, число $\Delta_0 = F(X_0) = c_Б \beta$ – значение ЦФ для начального опорного плана X_0. Числа $\Delta_j = c_Б A_j - c_j$, $j = \overline{1, n}$ называются **оценками свободных переменных.**

Теорема. *Пусть исходная задача решается на максимум. Если для некоторого опорного плана все оценки* $\Delta_j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$, *то такой план оптимальный.*

Доказательство. Так как $F = \Delta_0 - \sum\limits_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j$ и по условию $\Delta_j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$, то F достигает максимального значения при $\sum\limits_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j = 0$. Это возможно лишь при $x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots x_n = 0$, т.е. опорный план $(\underbrace{\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m}_{m},\ \underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{n-m})$ оптимальный.

.■.

Теорема. *Пусть исходная задача решается на минимум. Если для некоторого опорного плана все оценки* $\Delta_j \leq 0$, $j = \overline{1, n}$, *то такой план оптимален.*

Переход к не худшему опорному плану. Пусть решается задача ЛП с системой ограничений в предпочтительном виде:

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i, \ \beta_i \ge 0, \ \ i = \overline{1,m}. \qquad (1.33)$$

Ее начальный опорный план $X_0 = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m, 0, 0, ..., 0)$. Значение ЦФ $F(X_0) = \Delta_0 = c_Б \beta$.

Рассмотрим задачу на максимум. Если $\Delta_j \ge 0$, $j = \overline{1,n}$, то опорный план X_0 оптимальный. Пусть существует j_0, для которого $\Delta_{j_0} < 0$. Вектор–столбец A_{j_0} называется **разрешающим**, переменная x_{j_0} – **перспективной**. Не изменяя нулевых значений свободных переменных кроме x_{j_0}, увеличим значение ЦФ. Увеличивать x_{j_0} следует осторожно, так как ее значение влияет на значения $x_1, x_2, ..., x_m$, которые должны быть неотрицательными. Из системы ограничений (1.33) в силу того, что $x_{m+1} = ... = x_{j_0-1} = x_{j_0+1} = ... x_n = 0$, а $x_{j_0} > 0$, имеем $x_i = \beta_i - \alpha_{ij_0} x_{j_0}$, $i = \overline{1,m}$.

При значительном увеличении x_{j_0} может случиться, что для некоторого i соответствующее β_i станет меньше $\alpha_{ij_0} x_{j_0}$, и, следовательно, получим $x_i < 0$, что недопустимо. В случае, если $\alpha_{ij_0} \le 0$, $i = \overline{1,m}$, такого нарушения не произойдет.

Будем считать, что, например, первые k коэффициентов $\alpha_{ij_0} > 0$, $i = \overline{1,k}$, $k \le m$. Тогда x_{j_0} можно увеличивать до тех пор, пока $\beta_i - \alpha_{ij_0} x_{j_0} \ge 0$, $i = \overline{1,k}$, откуда имеем:

$$x_{j_0} \le \beta_i / \alpha_{ij_0}, \ \ \alpha_{ij_0} > 0, \ \ i = \overline{1,k}.$$

Найдем среди отношений β_i / α_{ij_0}, $i = \overline{1,k}$, наименьшее. Назовем его **наименьшим симплексным отношением** и обозначим буквой θ, т.е.

$$x_{j_0} = \min(\beta_i / \alpha_{ij_0}) = \beta_{i_0} / \alpha_{i_0 j_0} = \theta.$$

Если это условие выполняется при нескольких i, то в качестве i_0 можно выбрать любое. Строку i_0 называют **разрешающей**, элемент $\alpha_{i_0 j_0}$ – **разрешающим**. Переменная x_{i_0}, присутствующая в базисе, является **неперспективной**, ее следует вывести из базиса.

Полагая $x_{m+1} = \ldots x_{j_0 - 1} = 0,\ x_{j_0} = \theta,\ x_{j_0+1} = \ldots x_n = 0$, из равенства (1.33) находим:

$$x_1 = \beta_1 - \alpha_{1 j_0}\theta,\ \ldots,\ x_{i_0 - 1} = \beta_{i_0 - 1} - \alpha_{i_0 - 1, j_0}\theta,\ x_{i_0} = 0,$$
$$x_{i_0 + 1} = \beta_{i_0 + 1} - \alpha_{i_0 + 1, j_0}\theta,\ \ldots,\ x_m = \beta_m - \alpha_{m j_0}\theta.$$

Новый базис будет состоять из переменных

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{i_0 - 1},\ x_{j_0},\ x_{i_0+1},\ \ldots,\ x_{j_0 - 1},\ x_{i_0},\ x_{j_0+1},\ \ldots,\ x_n,$$

а соответствующий ему опорный план:

$$X_1 = (\beta_1 - \alpha_{1 j_0}\theta,\ \ldots,\ \beta_{i_0 - 1} - \alpha_{i_0 - 1, j_0}\theta,\ 0,$$
$$\beta_{i_0 + 1} - \alpha_{i_0 + 1, j_0}\theta,\ \ldots,\ \beta_m - \alpha_{m j_0}\theta,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \theta,\ 0,\ \ldots,\ 0).$$

В результате преобразований получен новый опорный план X_1, в котором переменная x_{i_0} заменена на x_{j_0}, причем $F(X_1) = \Delta_0 - \Delta_{j_0}\theta = F(X_0) - \Delta_{j_0}\theta$. Но $\Delta_{j_0} < 0$, следовательно, $F(X_1) > F(X_0)$. Новый план X_1 не хуже начального X_0. Далее процесс повторяется. Проверяем, является ли план X_1 оптимальным. Если да, то задача решена. Если нет, то переходим к не худшему опорному плану X_2 и т.д.

Симплексные преобразования. Чтобы завершить шаг преобразований, ведущих к новому опорному плану в новом базисе, выразим новую базисную переменную x_{j_0} из уравнения с номером i_0 системы (1.33) через свободные переменные x_{m+1}, ..., x_{j_0-1}, x_{i_0}, x_{j_0+1}, ..., x_n :

$$x_{j_0} = \frac{\beta_{i_0}}{\alpha_{i_0 j_0}} - \left(\frac{\alpha_{i_0,m+1}}{\alpha_{i_0 j_0}} x_{m+1} + \ldots + \frac{1}{\alpha_{i_0 j_0}} x_{i_0} + \ldots + \frac{\alpha_{i_0 n}}{\alpha_{i_0 j_0}} x_n \right). \qquad (1.34)$$

Подставим выражение (1.34) в остальные ограничения (1.33):

$$x_i = \frac{\beta_i \alpha_{i_0 j_0} - \beta_{i_0} \alpha_{i j_0}}{\alpha_{i_0 j_0}} - \left(\frac{\alpha_{i,m+1}\alpha_{i_0 j_0} - \alpha_{i_0,m+1}\alpha_{i\ j_0}}{\alpha_{i_0 j_0}} x_{m+1} + \ldots - \frac{\alpha_{i j_0}}{\alpha_{i_0 j_0}} x_{i_0} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha_{in}\alpha_{i_0 j_0} - \alpha_{i_0 n}\alpha_{i\ j_0}}{\alpha_{i_0 j_0}} x_n \right), \ i = \overline{1,m}, \ \ i \neq i_0 . \qquad (1.35)$$

Аналогично, подставив выражение (1.34) в ЦФ (1.30), получим:

$$F = \frac{\Delta_0 \alpha_{i_0 j_0} - \Delta_{j_0} \beta_{i_0}}{\alpha_{i_0 j_0}} - \left(\frac{\Delta_{m+1}\alpha_{i_0 j_0} - \Delta_{j_0}\alpha_{i,m+1}}{\alpha_{i_0 j_0}} x_{m+1} + \ldots - \frac{\Delta_{j_0}}{\alpha_{i_0 j_0}} x_{i_0} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta_n \alpha_{i_0 j_0} - \Delta_{j_0} \alpha_{i_0 n}}{\alpha_{i_0 j_0}} x_n \right). \qquad (1.36)$$

Преобразование задачи ЛП к новому базису называется **симплексным преобразованием**. Из равенств (1.34)–(1.36) вытекают правила для перехода к следующей симплексной таблице:

1) из выражения (1.34) следует, что элемент новой таблицы, стоящий на месте разрешающего элемента заменяется обратной величиной:

$$\alpha'_{i_0 j_0} = \frac{1}{\alpha_{i_0 j_0}};$$

2) из выражения (1.34) следует, что оставшиеся элементы разрешающей строки i_0 новой таблицы равны соответствующим элементам разрешающей строки старой таблицы, деленным на разрешающий элемент:

$$\beta'_{i_0} = \frac{\beta_{i_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}, \quad \alpha'_{i_0 j} = \frac{\alpha_{i_0 j}}{\alpha_{i_0 j_0}}, \quad j = \overline{m+1, n}, \quad j \neq j_0;$$

3) из выражений (1.34) и (1.35) следует, что оставшиеся элементы разрешающего столбца j_0 новой таблицы равны соответствующим элементам разрешающего столбца старой таблицы, деленным на разрешающий элемент и изменением знака на противоположный:

$$\Delta'_{j_0} = -\frac{\Delta_{j_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}, \quad \alpha'_{ij_0} = -\frac{\alpha_{ij_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}, \quad i = \overline{1, m}, \quad i \neq i_0;$$

4) из выражений (1.35) и (1.36) следует, что любой другой элемент симплексной таблицы находится по правилу прямоугольника – для получения любого элемента новой симплексной таблицы нужно из соответствующего элемента прежней таблицы вычесть произведение элемента разрешающей строки на элемент разрешающего столбца, разделенное на разрешающий элемент:

$$\beta'_i = \beta_i - \frac{\beta_{i_0}\alpha_{ij_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}, \quad \Delta'_0 = \Delta_0 - \frac{\Delta_{j_0}\beta_{i_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}, \quad \Delta'_j = \Delta_j - \frac{\Delta_{j_0}\alpha_{i_0 j}}{\alpha_{i_0 j_0}},$$

$$\alpha'_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{i_0 j}\alpha_{ij_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{m+1, n}, \quad i \neq i_0, \quad j \neq j_0.$$

1.6. Признак бесконечности оптимальных планов

Теорема. *Если в индексной строке последней симплексной таблицы, содержащей оптимальный план, имеется хотя бы одна нулевая оценка, соответствующая свободной переменной, то задача ЛП имеет бесконечное множество оптимальных планов.*

Доказательство. Пусть в оптимальном плане $\Delta_{j_0} = 0$, где j_0 принадлежит множеству индексов свободных переменных, а минимальное симплексное отношение соответствует строке i_0. Тогда, введя x_{j_0} в базис, получим новое значение ЦФ:

$$\Delta_0^{'} = \Delta_0 - \frac{\beta_{i_0}^{*} \Delta_{j_0}}{\alpha_{i_0 j_0}} = \Delta_0 - \frac{\beta_{i_0}^{*} \cdot 0}{\alpha_{i_0 j_0}} = \Delta_0 .$$

Значение ЦФ при переходе к новому опорному плану не изменилось.

Если нулевых небазисных оценок в последней симплексной таблице окажется несколько, то, введя каждую из соответствующих переменных в базис, найдем оптимальные планы $X_1^*, X_2^*, ..., X_k^*$, для которых значение ЦФ будет одно и то же, т.е.

$$F(X_1^*) = F(X_2^*) = ... = F(X_k^*).$$

Согласно второй части основной теоремы ЛП, в этом случае оптимальным будет любой план, являющийся линейной комбинацией, т.е. общее решение примет вид:

$$X^* = \lambda_1 X_1^* + \lambda_2 X_2^* + ... + \lambda_k X_k^*,\ \ \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k = 1,\ \ \lambda_i > 0,\ \ i = \overline{1,k}\,.$$

Эта формула определяет бесконечное множество оптимальных планов.

.■.

Следствие. *Если в индексной строке симплексной таблицы, содержащей оптимальный план, все оценки свободных переменных положительны, то найденный оптимальный план единственный.*

1.7. Признак неограниченности ЦФ

Теорема. *Если в индексной строке симплексной таблицы задачи ЛП на максимум содержится отрицательная оценка $\Delta_{j_0} < 0$, а в соответствующем столбце переменной x_{j_0} нет ни* *одного положительного элемента, то ЦФ на множестве допустимых планов задачи не ограничена сверху.*

Доказательство. Пусть $\Delta_{j_0} < 0$. Тогда, можно попытаться, не изменяя нулевых значений СП x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n в равенствах (1.30), кроме x_{j_0}, увеличить значение ЦФ. Полагая в равенстве (1.31) все x_j, кроме x_{j_0}, равными нулю, получим $x_i = \beta_i - \alpha_{ij_0} x_{j_0}$, $i = \overline{1,m}$. Так как $x_i \geq 0$, то $\beta_i - \alpha_{ij_0} x_{j_0} \geq 0$, $i = \overline{1,m}$.

Пусть все $\alpha_{ij_0} \leq 0$, тогда при любом $x_{j_0} \geq 0$, имеем $x_i \geq 0$. Что касается ЦФ, то, взяв в качестве x_{j_0} достаточно большое положительное число, вследствие того, что $\Delta_{j_0} < 0$, можно сделать значение

$$F = \Delta_0 - (\Delta_{m+1} x_{m+1} + \ldots + \Delta_{j_0} x_{j_0} + \ldots + \Delta_n x_n)$$

как угодно большим.

В самом деле, так как $\Delta_{j_0} < 0$, при $x_{j_0} \to \infty$ имеем $F = \Delta_0 - \Delta_{j_0} x_{j_0} \to \infty$, т.е. ЦФ не ограничена сверху.

.■.

Теорема. *Если в индексной строке симплексной таблицы задачи ЛП на минимум содержится положительная оценка* $\Delta_{j_0} > 0$, *а в соответствующем столбце переменной* x_{j_0} *нет ни одного положительного элемента, то ЦФ на множестве допустимых планов задачи не ограничена снизу.*

2. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛП

2.1. Понятие двойственности

Рассмотрим задачу ЛП вида:

$$\max F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n,$$
$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{k,1} x_1 + a_{k,2} x_2 + \ldots + a_{k,n} x_n \le b_k, \\ a_{k+1,1} x_1 + a_{k+1,2} x_2 + \ldots + a_{k+1,n} x_n = b_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, l},$$
$$x_j \ - \ \textit{произвольные}, \quad j = \overline{l+1, n}.$$

Двойственной по отношению к исходной (прямой) задаче называется задача вида:

$$\min \varphi = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m,$$
$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{m1} y_m \ge c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1,l} y_1 + a_{2,l} y_2 + \ldots + a_{m,l} x_n \ge c_l, \\ a_{1,l+1} y_1 + a_{2,l+1} y_2 + \ldots + a_{m,l+1} x_n = c_{l+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \ldots + a_{mn} x_n = c_n, \end{cases}$$
$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1, k},$$
$$y_i \ - \ \textit{произвольные}, \quad i = \overline{k+1, m}.$$

Сравнивая две задачи, видно, что двойственная задача составляется по следующим правилам:

1. Если в прямой задаче ЦФ задается на максимум, то в двойственной задаче на минимум и наоборот.

2. Число переменных исходной задачи равно числу основных ограничений в системе двойственной задачи, а число ограничений прямой задачи – числу переменных в двойственной задаче.

3. Коэффициентами при неизвестных в ЦФ двойственной задачи являются свободные члены прямой задачи, а правыми частями в основных ограничениях двойственной задачи – коэффициенты при неизвестных в ЦФ прямой задачи.

4. Матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных в системе ограничений прямой задачи, и аналогичная матрица в двойственной задаче получаются друг из друга транспонированием.

5. Если переменная x_j прямой задачи принимает только неотрицательные значения, то *j*–ое ограничение в системе основных ограничений двойственной задачи является неравенством вида $\geq$. Если же переменная x_j прямой задачи может принимать любые значения, то *j*–ое ограничение в системе основных ограничений двойственной задачи является уравнением. Если *i*–ое ограничение в системе основных ограничений прямой задачи является неравенством, то *i*–ая переменная двойственной задачи $y_i \geq 0$. Если же *i*–ое ограничение – уравнение, то переменная y_i может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

2.2. Основное неравенство теории двойственности

Рассмотрим пару симметричных двойственных задач:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \qquad \min \varphi = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ \ i = \overline{1,m}, \quad (2.1) \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \ \ j = \overline{1,n}, \quad (2.2)$$

$$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,n}. \qquad y_i \geq 0, \ \ i = \overline{1,m}.$$

Теорема. *Для любых допустимых планов* $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *и* $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ *прямой и двойственной задач ЛП справедливо неравенство*

$$F(X) \le \varphi(Y),\ \text{т.е. } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i .$$

Доказательство. Учитывая неравенства (2.1) и (2.2), получаем:

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \overset{(2.2)}{\le} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \overset{(2.1)}{\le} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \varphi(Y).$$

.■.

Экономическое содержание теоремы. *Для любого допустимого плана производства X и любого допустимого вектора оценок ресурсов Y общая созданная стоимость не превосходит суммарной оценки ресурсов.*

2.3. Критерий оптимальности Канторовича

Теорема. *Если для некоторых допустимых планов* X^* *и* Y^* *пары двойственных задач выполняется равенство* $F(X^*) = \varphi(Y^*)$, *то* X^* *и* Y^* *являются оптимальными планами соответствующих задач.*

Доказательство. Согласно основному неравенству теории двойственности для любого допустимого плана X прямой задачи и допустимого плана Y^* двойственной справедливо неравенство $F(X) \le \varphi(Y^*)$. Но по условию $F(X^*) = \varphi(Y^*)$. Отсюда в силу транзитивности отношений «$\le$» и «=» получим $F(X) \le F(X^*)$. Но так как X произвольный допустимый план, то $F(X^*) = \max F$, т.е. X^* – оптимальный план прямой задачи ЛП.

Аналогично доказывается, что план Y^* является оптимальным для двойственной задачи.

.■.

Экономическое содержание теоремы. *План производства* X^* *и вектор оценок ресурсов* Y^* *являются оптимальными, если цена всей произведенной продукции и суммарная оценка ресурсов совпадают.*

2.4. Малая теорема двойственности

Теорема. *Для существования оптимального плана любой из пары двойственных задач необходимо и достаточно существование допустимого плана для каждой из них.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть задачи двойственной пары имеют оптимальные планы X^* и Y^*. Это значит, что $F(X^*) = \max F$ и $\varphi(Y^*) = \min \varphi$, т.е. X^* и Y^* принадлежат области их допустимых планов. Следовательно, соответствующие системы ограничений пары двойственных задач совместны, они имеют хотя бы по одному допустимому плану X^* и Y^*. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть каждая из пары двойственных задач имеет допустимый план. Докажем, что они имеют оптимальные планы. Пусть Y^* – допустимый план двойственной задачи. Тогда для любого допустимого плана X прямой задачи, согласно основному неравенству теории двойственности, получим:

$$F(X) \le \varphi(Y^*). \qquad (2.3)$$

Решая прямую задачу симплексным методом, получаем последовательность опорных планов $X_0, X_1, \ldots$, для которых $F(X_0), F(X_1), \ldots$. В силу неравенства (2.3) эта последовательность ограничена сверху. В ней найдется наибольшее значение целевой функции. Следовательно, существует допустимый план X^*, для которого $F(X) \le F(X^*)$. Аналогично доказывается, что $\varphi(Y) \ge \varphi(Y^*)$.

.■.

2.5. Основные теоремы двойственности

Теорема 1. *Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения целевых функций равны, т.е.* $F(X^*) = \varphi(Y^*)$. *Если одна из пары двойственных задач неразрешима вследствие неограниченности целевой функции на множестве допустимых решений, то система ограничений другой задачи противоречива.*

Рассмотрим пару симметричных двойственных задач в развернутом виде:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n,$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

$$\min \varphi = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m,$$
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge c_n, \end{cases}$$
$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Вводя дополнительные переменные $x_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}$, в прямую задачу и $y_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}$, в двойственную, приводим задачи к каноническому виду:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n,$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n+m}.$$

$$\min \varphi = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m,$$

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{m1} y_m - y_{m+1} = c_1, \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{m2} y_m - y_{m+2} = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \ldots + a_{mn} y_m - y_{m+n} = c_n, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \;\; i = \overline{1, m+n}.$$

Между переменными двойственных задач можно установить соответствие: сопоставляя базисным переменным одной задачи свободные переменные другой, и наоборот:

$$\begin{array}{cccccccc} & \text{СП} & & & & \text{БП} & & \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \ldots & x_{n+m} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_{m+1} & y_{m+2} & \ldots & y_{m+n} & y_1 & y_2 & \ldots & y_m \\ & \text{БП} & & & & \text{СП} & & \end{array}$$

Используя данное соответствие, зная решение прямой задачи, можно найти решение двойственной задачи. Оно находится в индексной строке последней симплексной таблицы при решении прямой задачи симплексным методом.

Экономическое содержание теоремы. *Если разрешима задача определения оптимального плана, максимизирующего выпуск продукции, то разрешима и задача определения оценок ресурсов, причем цена произведенной продукции и суммарная оценка ресурсов совпадают. Совпадение значений целевых функций для соответствующих планов пары двойственных задач достаточно для того, чтобы эти планы были оптимальными.*

Теорема 2 (о дополняющей нежесткости). *Для того, чтобы планы X^* и Y^* пары двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно выполнение условий:*

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, \;\; j = \overline{1, n}, \quad (2.4) \qquad y_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \;\; i = \overline{1, m}. \quad (2.5)$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть X^* и Y^* – оптимальные планы пары двойственных задач вида:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \qquad \min \varphi = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \;\; i = \overline{1,m}, \quad (2.6) \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \;\; j = \overline{1,n},$$

$$x_j \ge 0, \;\; j = \overline{1,n}, \qquad y_i \ge 0, \;\; i = \overline{1,m}.$$

Согласно предыдущей теореме, для этих планов значения ЦФ совпадают:

$$F(X^*) = \varphi(Y^*) \;\; \text{или} \;\; \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* . \tag{2.7}$$

Подставим в (2.7) b_i из равенства (2.6), получим, что

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right) y_i^* = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* ,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0 . \tag{2.8}$$

Поскольку $x_j^* \ge 0$ и $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \ge 0$, $j = \overline{1,n}$, то из равенства (2.8) следуют условия (2.4). Условия (2.5) доказываются аналогично.

Достаточность. Пусть для некоторых допустимых планов X^* и Y^* выполняются (2.4). Докажем их оптимальность. Просуммируем (2.4) по всем $j = \overline{1,n}$, и выполним преобразования, противоположные предыдущим, получим:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} y_i^* \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = 0.$$

Получили, что $F(X^*) = \varphi(Y^*)$. Согласно критерия Канторовича, планы X^* и Y^* являются оптимальными.

.■.

Из условий (2.4) и (2.5) следует, что если какое–либо ограничение одной из задач ее оптимальным планом обращается в строгое неравенство, то соответствующая компонента оптимального плана двойственной задачи должна равняться нулю, если же какая–либо компонента оптимального плана одной из задач положительна, то соответствующее ограничение в двойственной задаче ее оптимальном планом должно обращаться в строгое равенство.

Экономическое содержание теоремы. *Двойственные оценки могут служить мерой дефицитности ресурсов:* ***дефицитный*** *ресурс – который используется полностью по оптимальному плану производства, имеет положительную оценку, а* ***избыточный*** *ресурс – используемый не полностью, имеет нулевую оценку.*

Теорема 3 (об оценках). *Двойственные оценки показывают приращение функции цели, вызванное малым изменением свободного члена соответствующего ограничения:*

$$\frac{\partial f(X^*)}{\partial b_i} = y_i^*, \ i = \overline{1,m}. \qquad (2.9)$$

Доказательство: Рассмотрим задачу МП вида:

$$\max F = f(X), \qquad (2.10)$$
$$\varphi_i(X) = b_i, \ i = \overline{1,m}. \qquad (2.11)$$

Перейдем от задачи на условный экстремум к задаче на безусловный экстремум. Для этого построим вспомогательную функцию Лагранжа:

$$L(X,Y) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} y_i (b_i - \varphi_i(X)), \tag{2.12}$$

где y_i – неопределенные множители Лагранжа.

Запишем необходимые условия экстремума функции Лагранжа, для этого найдем частные производные функции Лагранжа по x_j и y_i и приравняем их нулю:

$$\frac{\partial L(X,Y)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(X)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} y_i \frac{\partial \varphi_i(X)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial L(X,Y)}{\partial y_i} = b_i - \varphi_i(X) = 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{2.14}$$

Покажем, что всякое экстремальное значение задачи (2.10), (2.11) удовлетворяет условиям (2.13), (2.14).

Пусть X^*– допустимый план, доставляющий ЦФ (2.10) экстремальное значение. Так как X^*– допустимый план, то $\varphi_i(X^*) = b_i$, $i = \overline{1,m}$, и условия (2.14) выполняются. Следовательно, из функции Лагранжа (2.12) следует:

$$L(X^*,Y^*) = f(X^*), \text{ откуда } \frac{\partial L(X^*,Y^*)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(X^*)}{\partial x_j} = 0,$$

т.е. выполняются условия (2.13).

Итак, каждая допустимая точка X^*, в которой ЦФ достигает экстремального значения, должна быть решением системы (2.13), (2.14). Это необходимое условие для отыскания экстремума.

Будем считать, что свободные члены системы ограничений (2.11) могут изменяться в некоторых пределах. Тогда в случае задачи ЛП многогранник планов будет изменяться. Его крайние точки становятся функциями правых частей b_i, следовательно, будет изменяться и экстремальное значение ЦФ.

Обозначим координаты крайних точек через:

$$x_1(B) = x_1(b_1, b_2, ..., b_m),\ x_2(B) = x_2(b_1, b_2, ..., b_m),\ \dots,$$
$$x_n(B) = x_n(b_1, b_2, ..., b_m).$$

Рассмотрим теперь функцию Лагранжа как функцию, зависящую от вектора свободных членов B:

$$L(B) = f(X(B)) + \sum_{i=1}^{m} y_i (b_i - \varphi_i(X(B))). \tag{2.15}$$

Дифференцируя функцию Лагранжа (2.15) по b_i, получаем:

$$\frac{\partial L(B)}{\partial b_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} y_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial x_j}{\partial b_i} + \sum_{i=1}^{m} (b_i - \varphi_i(X(B))) \frac{\partial y_i}{\partial b_i} + y_i. \tag{2.16}$$

Учитывая условия (2.13) и (2.14) из равенства (2.16) получим:

$$\frac{\partial L(B)}{\partial b_i} = y_i,\ \ i = \overline{1, m}.$$

Но для оптимального плана $L(X^*, Y^*) = f(X^*)$, следовательно, $\dfrac{\partial f(X^*)}{\partial b_i} = y_i^*,\ \ i = \overline{1, m}$.

.■.

Экономическое содержание теоремы. *В равенстве (2.9) дифференциалы заменим приращениями. Получим:* $\Delta f(X^*) \approx y_i^* \Delta b_i$, $i = \overline{1, m}$. *При* $\Delta b_i = 1$ *имеем* $\Delta f(X^*) \approx y_i^*$, $i = \overline{1, m}$. *Отсюда величина двойственной оценки численно равна изменению ЦФ при изменении соответствующего свободного члена ограничений на единицу.*

3. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

3.1. Постановка транспортной задачи (ТЗ)

Имеется m поставщиков $A_1, A_2, \ldots, A_m$, у которых сосредоточен однородный груз в количествах a_i, $i = \overline{1,m}$, единиц. Груз нужно доставить n потребителям $B_1, B_2, \ldots, B_n$, потребность в грузе которых соответственно равна b_j, $j = \overline{1,n}$, единиц. Известна стоимость перевозки единицы груза от i–го поставщика j–му потребителю c_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Требуется составить план перевозок груза от поставщиков потребителям $X^* = [x_{ij}^*]_{m \times n}$, при котором суммарные транспортные затраты будут минимальными.

Экономико–математическая модель ТЗ должна отражать все условия и цель задачи в математической форме. Цель ТЗ – минимизировать общие затраты на реализацию плана перевозок, которые можно представить функцией:

$$\min F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\,. \tag{3.1}$$

Переменные x_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, должны удовлетворять ограничениям по запасам, потребностям и условиям неотрицательности, которые исключают обратные перевозки:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ \ i = \overline{1,m}, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ \ j = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$x_{ij} \ge 0, \ \ i = \overline{1,m}, \ \ j = \overline{1,n}. \tag{3.3}$$

Для решения условия ТЗ записывают в **распределительную** таблицу, которую иногда называют **табличной** или **матричной** моделью ТЗ:

$B_j(b_j)$ / $A_i(a_i)$	$B_1(b_1)$	$B_2(b_2)$	…	$B_2(b_2)$
$A_1(a_1)$	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}
$A_2(a_2)$	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…
$A_m(a_m)$	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}

Теорема (о существовании допустимого плана). *Для того, чтобы ТЗ имела допустимые планы, необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \tag{3.4}$$

Доказательство. *Необходимость.* Докажем, что для допустимого плана выполняется равенство (3.4). Так как план допустимый, то он удовлетворяет основным ограничениям (3.2) ТЗ:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i ,\ i = \overline{1,m}, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j ,\ j = \overline{1,n}.$$

Очевидно, что все элементы x_{ij} суммируются как по строкам, так и по столбцам, различие лишь в перестановке этих элементов. Однако от перестановки слагаемых сумма не меняется, поэтому $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, т.е. равенство (3.4) является необходимым условием разрешимости ТЗ.

Достаточность. Покажем, что если выполняется условие (3.4), то всегда имеется допустимый план. Обозначим $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = A$.

Переменные x_{ij} выразим через данные задачи следующим образом:

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A}, \; i = \overline{1, m}, \; j = \overline{1, n}. \tag{3.5}$$

Покажем, что переменные (3.5) составляют допустимый план.

Поскольку $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, то $A > 0$, а поэтому и $x_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Набор неотрицательных чисел (3.5) будет составлять допустимый план тогда, когда он удовлетворяет системе ограничений (3.2). Просуммируем равенства (3.5) по индексу *j*:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{a_i}{A} \sum_{j=1}^{n} b_j = a_i, \; i = \overline{1, m}.$$

Аналогично, просуммируем равенства (3.5) по индексу *i*:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{b_j}{A} \sum_{i=1}^{m} a_i = b_j, \; j = \overline{1, n}.$$

Следовательно, набор чисел (3.5) удовлетворяет системе ограничений задачи, а поэтому является допустимым планом.

.■.

3.2. Закрытая и открытая модели ТЗ

Модель ТЗ называется **закрытой**, если суммарный объем груза, имеющегося у поставщиков, равен суммарному спросу потребителей, т.е. выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

В случае закрытой модели весь имеющийся груз полностью развозится поставщиками, и все потребности потребителей полностью удовлетворены.

Модель ТЗ называется **открытой**, если выполняется одно из условий:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j, \quad \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

В случае открытой модели либо все потребители удовлетворены, но при этом у некоторых поставщиков остаются излишки груза, либо весь груз поставщиками вывезен, но потребности потребителей полностью не удовлетворены.

Согласно теореме о существовании допустимого плана для разрешимости ТЗ с открытой моделью необходимо преобразовать ее в закрытую.

Если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то необходимо ввести фиктивного *(n+1)*–го потребителя B_{n+1}. Спрос фиктивного потребителя равен $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. В табличной модели ТЗ предусматривается дополнительный столбец.

Если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводится фиктивный *(m+1)*–й поставщик A_{m+1}. В распределительной таблице задачи предусматривается дополнительная строка. Запас груза у фиктивного поставщика равен $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$.

Все тарифы фиктивного потребителя (поставщика) равны нулю, т.е. $c_{i,n+1} = 0,\ i = \overline{1,m},\ c_{m+1,j} = 0,\ j = \overline{1,n}$.

При преобразовании открытой задачи в закрытую ЦФ не меняется, так как все слагаемые, соответствующие дополнительным перевозкам, равны нулю.

Теорема. *Ранг матрицы A транспортной задачи на единицу меньше числа уравнений r(A)=m+n–1.*

Доказательство. Матрица системы основных ограничений (3.2) имеет вид:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

В каждом столбце матрицы A содержатся только два элемента, равных единице, остальные элементы равны нулю. При этом, если сложить первые m строк матрицы, получим строку, элементами которой будут единицы. Этот же результат получаем, если сложить последние n строк. Обозначая i–ю строку через s_i, получаем:

$$s_1+s_2+\ldots+s_m=s_{m+1}+s_{m+2}+\ldots+s_{m+n}.$$

Отсюда видно, что любая строка есть линейная комбинация остальных строк, например,

$$s_1=s_{m+1}+s_{m+2}+\ldots+s_{m+n}-(s_2+\ldots+s_m).$$

Значит, не меняя ранга матрицы A, можно вычеркнуть, например, последнюю строку. Минор *(m+n–1)*–го порядка получившейся матрицы, составленный из столбцов коэффициентов при $x_{1n},x_{2n},\ldots,x_{mn},x_{11},x_{12},\ldots,x_{1,n-1}$, будет отличен от нуля, что и доказывает теорему.

.■.

3.3. Построение исходного опорного плана

Если в плане перевозок переменная равна некоторому числу, т.е. $x_{ij} \neq 0$, то эта клетка считается занятой (базисной), если же $x_{ij} = 0$, то клетка считается свободной.

Правило “северо–западного угла”. Груз распределяется с загрузки левой верхней, условно называемой северо–западной, клетки *(1,1)*. В клетку *(1,1)* заносится меньшее из чисел a_1 и b_1, т.е. $x_{11} = \min(a_1, b_1)$.

Если $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$ и первый потребитель B_1 будет полностью удовлетворен. В дальнейшем первый столбец таблицы в расчет не принимается, в нем переменные $x_{i1} = 0$, $i = \overline{2,m}$. Двигаясь вправо по первой строке таблицы, заносим в соседнюю клетку *(1,2)* меньшее из чисел $a_1 - b_1$ или b_2, т.е. $x_{12} = \min(a_1 - b_1, b_2)$. Если $a_1 - b_1 < b_2$, то $x_{12} = a_1 - b_1$ и запасы первого поставщика исчерпаны, первая строка таблицы в дальнейшем в расчет не принимается. Переходим к аналогичному распределению запаса груза второго поставщика.

Если $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$ и запас первого поставщика будет исчерпан. В дальнейшем первая строка таблицы в расчет не принимается, в ней переменные $x_{1j} = 0$, $j = \overline{2,n}$. Двигаясь вниз по первому столбцу таблицы, заносим в клетку *(2,1)* меньшее из чисел $a_2, b_1 - a_1$, т.е. $x_{21} = \min(a_2, b_1 - a_1)$. Если $a_2 > b_1 - a_1$, то $x_{21} = b_1 - a_1$ и первый потребитель будет полностью удовлетворен, первый столбец таблицы в дальнейшем в расчет не принимается. Переходим к аналогичному распределению груза для второго потребителя.

Процесс распределения по второй, третьей и последующим строкам (столбцам) производится аналогично распределению по первой строке или первому столбцу до тех нор, пока не исчерпаются ресурсы. Последней будет заполнена клетка *(m,n)*.

Правило “минимального элемента”. В распределительной таблице просматриваются тарифы, и в первую очередь заполняется клетка с минимальным значением тарифа. При этом в эту клетку записывается максимально возможное значение поставки. Затем из рассмотрения исключают строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, или столбец, соответствующий потребителю, спрос которого полностью удовлетворен. После этого из оставшихся свободных клеток таблицы снова выбирают клетку с наименьшим тарифом. Процесс распределения заканчивается, когда все запасы поставщиков исчерпаны, а спрос потребителей полностью удовлетворен.

В результате заполнения таблицы получим опорный план, который должен содержать *m+n–1* закруженных клеток. Но в процессе заполнения таблицы могут быть одновременно исключены строка и столбец. Так бывает, когда полностью исчерпан запас груза и полностью удовлетворен спрос потребителя (вырожденная задача). В этом случае в свободной клетке, которая не образует цикл с занятыми клетками, надо записать число 0 (нуль–загрузку) и условно считать такую клетку занятой.

Теорема (о потенциалах). *План* $X^* = [x_{ij}^*]_{m\times n}$ *ТЗ является оптимальным, если ему соответствует система из* $m+n$ *чисел* u_i^* *и* v_j^*, *удовлетворяющих условиям:*

$$u_i^* + v_j^* = c_{ij} \text{ для } x_{ij}^* > 0;$$
$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i^* + v_j^*) \ge 0 \text{ для } x_{ij}^* = 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Числа u_i^* *и* v_j^* *называются потенциалами соответственно i–го поставщика и j–го потребителя.*

Доказательство. Транспортную задачу (3.1)–(3.3) можно рассматривать как двойственную задачу к некоторой исходной задаче, решаемой на максимум. Каждому i–му ограничению двойственной задачи $x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} = a_i$ в исходной задаче будет соответствовать переменная u_i, $i = \overline{1,m}$, а j–му ограничению $x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{mj} = b_j$ – переменная v_j, $j = \overline{1,n}$. Тогда исходная задача запишется в виде:

$$\max \varphi = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \,,$$

$$u_i + v_j \le c_{ij}\,,\ i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}\,.$$

Оптимальным для двойственной задачи является план X^*, а для исходной $Y^*(u_i^*, v_j^*)$. На основании первой теоремы двойственности для пары двойственных задач имеет место равенство $\min F = \max \varphi$, а на основании второй теоремы двойственности выполняются условия: $u_i^* + v_j^* = c_{ij}$ *для* $x_{ij}^* > 0$; $u_i^* + v_j^* \le c_{ij}$ для $x_{ij}^* > 0$; $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

.■.

Из теоремы следует, что для оптимального опорного плана ТЗ необходимо выполнение условий: каждой занятой клетке в распределительной таблице соответствует сумма потенциалов, равная тарифу этой клетки; каждой свободной клетке соответствует сумма потенциалов, не превышающая тарифа этой клетки.

Для перехода от одного опорного плана (базиса) к другому при решении ТЗ используются **циклы**. Цикл представляет собой замкнутую ломаную линию, состоящую из звеньев, пересекающихся под прямым углом. Цикл включает в себя одну свободную клетку, а остальные клетки цикла должны быть заняты. В цикле всегда четное количество клеток. Если ломанная линия, образующая цикл, пересекается, то точки самопересечения не являются вершинами цикла. Вершинами цикла не считаются и “транзитные” клетки.

Для наиболее перспективной свободной клетки строится цикл с вершинами в загруженных клетках. Вершинам цикла условно приписываются знаки: перспективной клетке “+”, следующей “–”, следующей снова “+” и т.д. Из поставок в клетках цикла с “отрицательными” вершинами выбирается наименьшее количество груза λ, которое и “перемещается” по клеткам цикла: прибавляется к поставкам в “положительных” вершинах и вычитается из поставок в “отрицательных” вершинах.

Алгоритм метода потенциалов:

1) Сравниваем общий запас груза с суммарным спросом. В случае нарушения равенства вводим в рассмотрение фиктивного поставщика (потребителя).

2) Условия ТЗ записываем в форме распределительной таблицы.

3) Строим опорный план по одному из правил.

4) Определяем потенциалы поставщиков и потребителей.

5) Находим оценки свободных клеток Δ_{ij}. Если все $\Delta_{ij} \geq 0$, то полученный план является оптимальным. При этом если все $\Delta_{ij} > 0$, то полученный оптимальный план единственный. В случае, если хотя бы одна оценка $\Delta_{ij} = 0$, имеем бесчисленное множество оптимальных планов с одним и тем же значением ЦФ.

6) Если хотя бы одна из оценок свободных $\Delta_{ij} < 0$, то переходим с помощью цикла к другому опорному плану.

3.4. Усложненные постановки ТЗ

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся случаи.

1) Нередко целесообразно минимизировать суммарные затраты на производство и транспортировку продукции. В таких задачах критерием оптимальности будет служить сумма затрат на производство единицы груза и на его перевозку.

2) Часто необходимо вводить ограничения, согласно которым отдельные поставки от определенного поставщика определенному потребителю должны быть исключены. Это достигается искусственным завышением тарифов в клетках, перевозки через которые следует запретить.

3) Иногда приходится учитывать ограничения по пропускной способности маршрутов. Если по маршруту $A_k B_s$ можно провести не более d единиц груза, то B_s–й столбец матрицы перевозок разбивается на два: $B_s^{'}$ и $B_s^{''}$. В первом спрос принимается равным разности между действительным спросом b_s и ограничением d, во втором – ограничению d. Тарифы c_{ij} в обеих столбцах одинаковы и

равны данным, но в первом в клетке, соответствующей ограничению, вместо истинного тарифа ставится искусственно завышенный тариф M. Затем задача решается обычным способом.

	$B_{s-1}(b_{s-1})$	$B'_s(b_s-d)$	$B''_s(d)$	$B_{s+1}(b_{s+1})$
$A_{k-1}(a_{k-1})$	$c_{k-1,s-1}$ $x_{k-1,s-1}$	$c_{k-1,s}$ $x'_{k-1,s}$	$c_{k-1,s}$ $x''_{k-1,s}$	$c_{k-1,s+1}$ $x_{k-1,s+1}$
$A_k(a_k)$	$c_{k,s-1}$ $x_{k,s-1}$	M $x'_{k,s}$	c_{ks} $x''_{k,s}$	$c_{k,s+1}$ $x_{k,s+1}$
$A_{k+1}(a_{k+1})$	$c_{k+1,s-1}$ $x_{k+1,s-1}$	$c_{k+1,s}$ $x'_{k+1,s}$	$c_{k+1,s}$ $x''_{k+1,s}$	$c_{k+1,s+1}$ $x_{k+1,s+1}$

4) Может случиться, что некоторые поставки по определенным маршрутам обязательны и должны войти в оптимальный план независимо от того, выгодно это или нет в условиях всей задачи. Тогда соответственно уменьшают запасы груза у поставщиков и спрос у потребителей и решают задачу относительно тех поставок, которые не обязательны.

3.5. ТЗ с максимизацией целевой функции

Если в задачах транспортного типа ЦФ максимизируется, то:

1) начальный опорный план составляется по правилу “максимального элемента”;

2) оптимальным будет опорный план, которому в распределительной таблице сопутствуют свободные клетки с неположительными оценками, т.е. все $\Delta_{ij} \le 0$;

3) выбор клетки, подлежащей заполнению при переходе от одного опорного плана к другому, должен производиться не по отрицательной, а по положительной оценке.

4. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ (ЦП)

4.1. Классические задачи ЦП

ЦП – это раздел МП, изучающий экстремальные задачи, в которых на искомые переменные налагается условие целочисленности, а область допустимых решений конечна.

Задача о контейнерных перевозках (задача о рюкзаке). Для перевозки n видов продукции используется контейнер с m отсеками**.** Продукция характеризуется свойством неделимости, т.е. ее можно брать в количестве *0,1,2,…* единиц.

Пусть c_j, $j=\overline{1,n}$, полезность единицы j–й продукции, b_i, $i=\overline{1,m}$, вместимость i–го отсека, a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, расход i–го отсека для перевозки единицы j–й продукции.

Требуется определить план перевозки X^*, т.е. количество единиц каждого вида продукции, погруженной в контейнер, при котором обеспечивается максимальная общая полезность рейса.

Математическая модель задачи имеет вид:

$$\max F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b_i,\quad i=\overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0 \;\; \text{\textit{и целые}},\quad j=\overline{1,n}.$$

Если для перевозки используется один отсек вместимостью b и каждый вид продукции может быть взят $(x_j=1)$ или нет $(x_j=0)$, то модель задачи запишется в виде:

$$\max F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b,$$

$$x_j \in \{0;1\},\quad j=\overline{1,n}.$$

Задача о назначении (проблема выбора). Имеется n исполнителей, которые могут выполнять n различных работ. Известна полезность c_{ij}, $i, j = \overline{1,n}$, i–го исполнителя, если он будет выполнять j–ю работу. Необходимо так назначить исполнителей на работы, чтобы добиться максимальной общей полезности при условии, что каждый исполнитель может быть назначен только на одну работу и за каждой работой должен быть закреплен только один исполнитель.

Обозначим через $x_{ij} = 1$ факт назначения, а через $x_{ij} = 0$ факт неназначения i–го исполнителя на j–ю работу.

ЭММ задачи примет вид:

$$\max F = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,n},$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n},$$

$$x_{ij} \in \{0;1\}, \quad i, j = \overline{1,n}.$$

Задача о назначении имеет самое широкое применение. Например, при закреплении машин за маршрутами, распределении инструментов для обработки, рабочих или бригад за работами и т.д.

4.2. Метод Гомори

Рассмотрим целочисленную задачу ЛП:

$$\max(\min) F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{4.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = \overline{1,m}, \tag{4.2}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,n}, \tag{4.3}$$

$$x_j - целые, \ j = \overline{1,n}. \tag{4.4}$$

Алгоритм метода Гомори (отсечения):

1. Решается задача (4.1)–(4.3) с отброшенным условием целочисленности (4).

2. Полученное оптимальное решение, если оно существует, проверяется на целочисленность. Если условие целочисленности выполняется по всем переменным, то оптимальное решение задачи (4.1)–(4.4) совпадает с оптимальным решением задачи (4.1)–(4.3). Если это условие не выполняется хотя бы по одной переменной, то переходят к третьему этапу. Если задача (4.1)–(4.3) является неразрешимой, то исходная задача (4.1)–(4.4) тоже не имеет решения.

3. Строится дополнительное ограничение, отсекающее часть области, в которой содержится оптимальное решение задачи (4.1)–(4.3) и не содержится ни одного допустимого решения задачи (4.1)–(4.4).

4. Возвращаемся к задаче ЛП с отброшенным условием целочисленности, но с расширенной системой ограничений, в которую добавляется дополнительное ограничение, построенное на третьем шаге. К расширенной системе ограничений вновь применяется симплексная процедура. Если найденное таким образом решение будет опять нецелым, то формируется новое дополнительное ограничение и процесс вычислений повторяется.

С геометрической точки зрения каждому дополнительному линейному ограничению в n–мерном пространстве соответствует определенная гиперплоскость, отсекающая от многогранника решений некоторую его часть, включая и оптимальную на данном этапе нецелочисленную вершину. При этом все точки с целочисленными координатами, в том числе и искомая оптимальная, остаются в усеченном многограннике. Так как множество целых точек усеченного многогранника совпадает с множеством целых точек исходного многогранника, то понятно, что если оптимальное решение ЗЛП на усеченном многограннике удовлетворяет условию целочисленности, то оно является оптимальным целочисленным решением и исходной задачи. Через несколько операций отсечения искомая целочисленная точка оказывается сначала на границе, а затем становится оптимальной вершиной неоднократно усеченного многогранника решений.

Построение правильного отсечения. Основное в алгоритме – построение дополнительного ограничения, которое называется **правильным отсечением.** Правильное отсечение должно удовлетворять следующим свойствам: 1) должно быть линейным; 2) отсекать найденное оптимальное нецелочисленное решение задачи (4.1)–(4.3); 3) не отсекать ни одного из целочисленных решений задачи (4.1)–(4.4).

После каждой итерации система основных ограничений имеет вид:

$$x_i = \beta_i - \sum_{x_j \in \{СП\}} \alpha_{ij} x_j, \; x_i \in \{БП\}. \tag{4.5}$$

Если выполняется признак оптимальности опорного плана, то записываем оптимальное решение. Если все его компоненты являются целыми, то исходная задача решена.

Предположим, что некоторые β_i нецелые. Пусть компонента i_0 является нецелой. Рассмотрим i_0–равенство системы (4.5):

$$x_{i_0} = \beta_{i_0} - \sum_{x_j \in \{СП\}} \alpha_{i_0 j} x_j \,. \tag{4.6}$$

Найдем целую и дробную части коэффициентов β_{i_0} и $\alpha_{i_0 j}$:

$$\beta_{i_0} = [\beta_{i_0}] + \{\beta_{i_0}\}, \quad \alpha_{i_0 j} = [\alpha_{i_0 j}] + \{\alpha_{i_0 j}\}. \tag{4.7}$$

Подставив выражения (4.7) в равенство (4.6), получим:

$$x_{i_0} = \left([\beta_{i_0}] - \sum_{x_j \in \{СП\}} [\alpha_{i_0 j}] x_j \right) + \left(\{\beta_{i_0}\} - \sum_{x_j \in \{СП\}} \{\alpha_{i_0 j}\} x_j \right). \tag{4.8}$$

Так как первая скобка равенства (4.8) является целым числом, то для того чтобы x_{i_0} было целым, необходимо, чтобы целой была величина $L_{i_0} = \{\beta_{i_0}\} - \sum_{x_j \in \{СП\}} \{\alpha_{i_0 j}\} x_j$. Покажем, что $L_{i_0} \le 0$.

Предположим, что $L_{i_0} > 0$. Величина $\sum\limits_{x_j \in \{СП\}} \{\alpha_{i_0 j}\} x_j$ не может быть отрицательной, так как $\{\alpha_{i_0 j}\} > 0$. Из предположения, что β_{i_0} нецелое, следует, что $0 < \{\beta_{i_0}\} < 1$**.** Так как L_{i_0} должно быть целым числом, то из предположения, что $L_{i_0} > 0$, следует что $\{\beta_{i_0}\} > 1$, а это противоречит определению дробной части числа.

Итак, доказано, что любое допустимое решение задачи (4.1)–(4.4) должно удовлетворять неравенству

$$\{\beta_{i_0}\} - \sum_{x_j \in \{СП\}} \{\alpha_{i_0 j}\} x_j \le 0. \tag{4.9}$$

Теорема. *Неравенство (4.9) определяет правильное отсечение Гомори, т.е.: 1) является линейным; 2) отсекает найденное оптимальное нецелочисленное решение задачи (4.1)–(4.3); 3) не отсекает ни одного целочисленного решения задачи (4.1)–(4.4).*

Доказательство. 1) Линейность соотношения (4.9) очевидна.

2) Пусть $X^*_{нц}$ – оптимальный нецелочисленный план задачи (4.1)–(4.3), причем, например, координата $x^*_{i_0}$ есть число нецелое.

Покажем, что это решение не удовлетворяет условию (4.9). Поскольку $X^*_{нц}$ оптимален, то $x^*_j = 0$, $x^*_j \in \{СП\}$. Поэтому

$$\sum_{x^*_j \in \{СП\}} \{\alpha_{i_0 j}\} x^*_j = 0. \tag{4.10}$$

Учитывая равенство (4.10), из условия (4.9) имеем, что $\{\beta_{i_0}\} \le 0$, что противоречит определению дробной части числа.

Итак, оптимальное решение $X^*_{нц}$ задачи (4.1)–(4.3) не удовлетворяет условию (4.9).

3) Предположим, что существует целая точка $X^0_ц$ задачи (4.1)–(4.4), которая не удовлетворяет условию (4.9), т.е.

$$\{\beta_{i_0}\} - \sum_{x^0_j \in \{СП\}} \{\alpha_{i_0 j}\} x^0_j > 0. \tag{4.11}$$

Так как $\sum\limits_{x_j^0 \in \{СП\}} \{\alpha_{i_0 j}\} x_j^0 > 0$ и $0 < \{\beta_{i_0}\} < 1$, то учитывая неравенство (4.11), получаем:

$$0 < \{\beta_{i_0}\} - \sum_{x_j^0 \in \{СП\}} \{\alpha_{i_0 j}\} x_j^0 < 1,$$

а это противоречит тому, что L_{i_0} для всех планов задачи (4.1)–(4.4) есть целое число.

.■.

Если после очередной итерации окажется, что в оптимальном плане задачи (4.1)–(4.3) имеется несколько нецелых координат, то для построения правильного отсечения надо выбрать строку содержащую свободный член с наибольшей дробной частью.

Признаком отсутствия целочисленного решения служит появление в симплексной таблице хотя бы одной строки с дробным свободным членом и целыми остальными коэффициентами.

Отличие выбора разрешающего элемента. Просматриваем строку, содержащую отрицательное число в столбце свободных членов. Выбираем любое отрицательное число в этой строке, которое и будет определять разрешающий столбец. Для чисел с одинаковыми знаками в столбце свободных членов и выбранном разрешающем составляем симплексные отношения. Наименьшее симплексное отношение будет определять разрешающую строку.

4.3. Метод ветвей и границ

Для определенности рассмотрим задачу нахождения максимума функции. Суть метода заключается в том, что сначала находится оптимальное решение задачи (4.1–4.3) без учета (4.4). Если в полученном решении некоторые переменные имеют дробные значения, то выбираем любую из дробных переменных и по ней строим два ограничения. В первом ограничении величина переменной берется меньше или равной наибольшему целому числу, а в другом ограничении она больше или равна наименьшему целому значению, но не меньше значения дробной переменной. Этим мы исключаем из ОДР промежуток с дробным значением неизвестной. Этот промежуток разбивает область допустимых решений на две части. В результате получим две новые подзадачи линейной оптимизации. Если после их решения полученные значения неизвестных будут нецелые, то, сравнив значения целевых функций, выбираем подзадачу с большим значением ЦФ. По новой неизвестной с дробным значением снова строим два дополнительных ограничения, тем самым разбивая выбранную подзадачу ещё на две новые подзадачи и т.д.

Ветвление заканчивается нахождением целочисленного решения, если оно существует. Границами в методе выступают значения целевых функций подзадач. На каждом этапе решения задачи дальнейшему ветвлению подлежит подзадача, у которой значение функции цели больше. Подзадачи, у которых значение ЦФ меньше, могут быть отброшены. Однако иногда, сравнивая значения целевых функций подзадач, приходится возвращаться к ветвям, которые ранее были отброшены, и продолжать дальнейшее решение от них. Процесс сопровождается построением дерева ветвления (рис. 4.1).

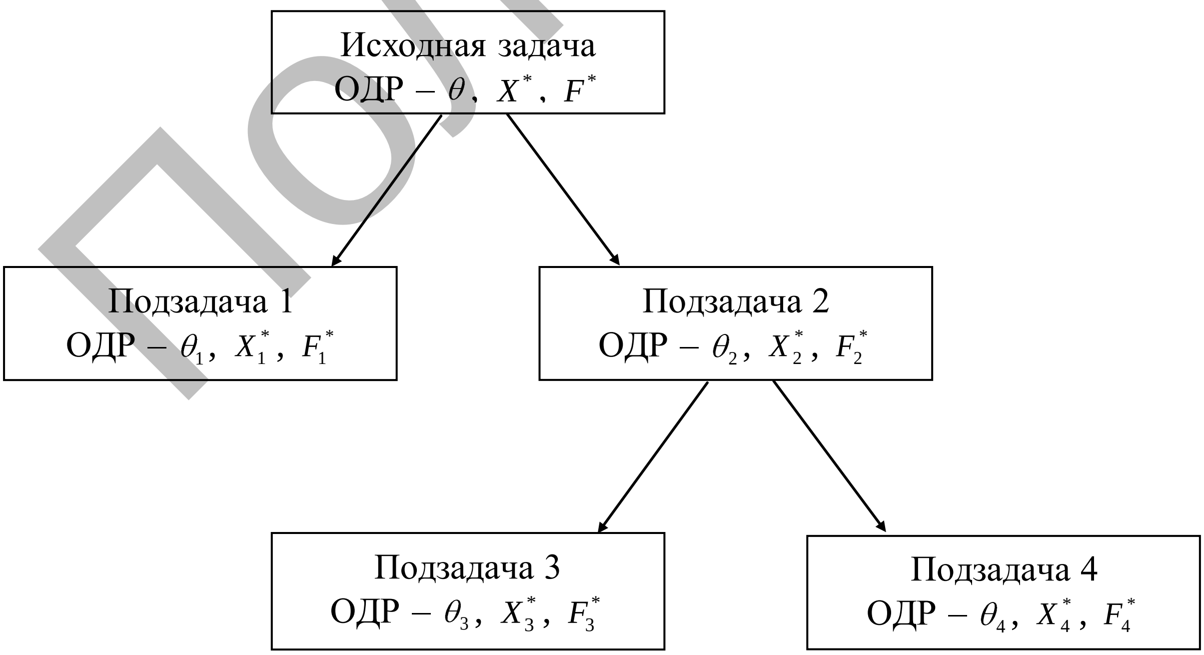

Рис. 4.1

5. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ (ДП)

Динамическое программирование (ДП) – это метод нахождения оптимального решения в задачах с многошаговой (многоэтапной) структурой.

5.1. Особенности задач ДП

1) Рассматривается система, состояние которой на каждом шаге определяется вектором x_t. Дальнейшее изменение ее состояния зависит только от данного состояния x_t и не зависит от того, каким путем система пришла в него. Такие процессы называются **процессами без последствий**.

2) На каждом шаге выбирается одно решение (управление) u_t, под действием которого система переходит из предыдущего состояния x_{t-1} в состояние x_t. Это новое состояние является функцией состояния на начало шага x_{t-1} и принятого в начале шага решения u_t, т.е. $x_t = x_t(x_{t-1}, u_t)$.

3) Действие на каждом шаге связано с определенным выигрышем (доходом, прибылью) или потерей (издержками), которые зависят от состояния на начало шага (этапа) и принятого решения.

4) На векторы состояния и управления могут быть наложены ограничения, объединение которых составляет область допустимых решений Ω.

5) Требуется найти такое допустимое управление u_t для каждого шага *t*, чтобы получить экстремальное значение функции цели за все *T* шагов.

Любую допустимую последовательность действий для каждого шага, переводящую систему из начального состояния в конечное, называют допустимой **стратегией управления**.

Допустимая стратегия управления, доставляющая функции цели экстремальное значение, называется **оптимальной**.

5.2. Геометрическая интерпретация задач ДП

Пусть *n* – размерность пространства состояний. В каждый момент времени координаты системы имеют вполне определенное значение. С изменением времени t могут изменяться значения координат вектора состояния. Переход системы из одного состояния в другое называется **траекторией** ее движения в пространстве состояний. Такой переход осуществляется воздействием на координаты состояния. Пространство, в котором координатами служат состояния системы, называется **фазовым**.

Рассмотрим двумерное пространство состояний (рис. 5.1).

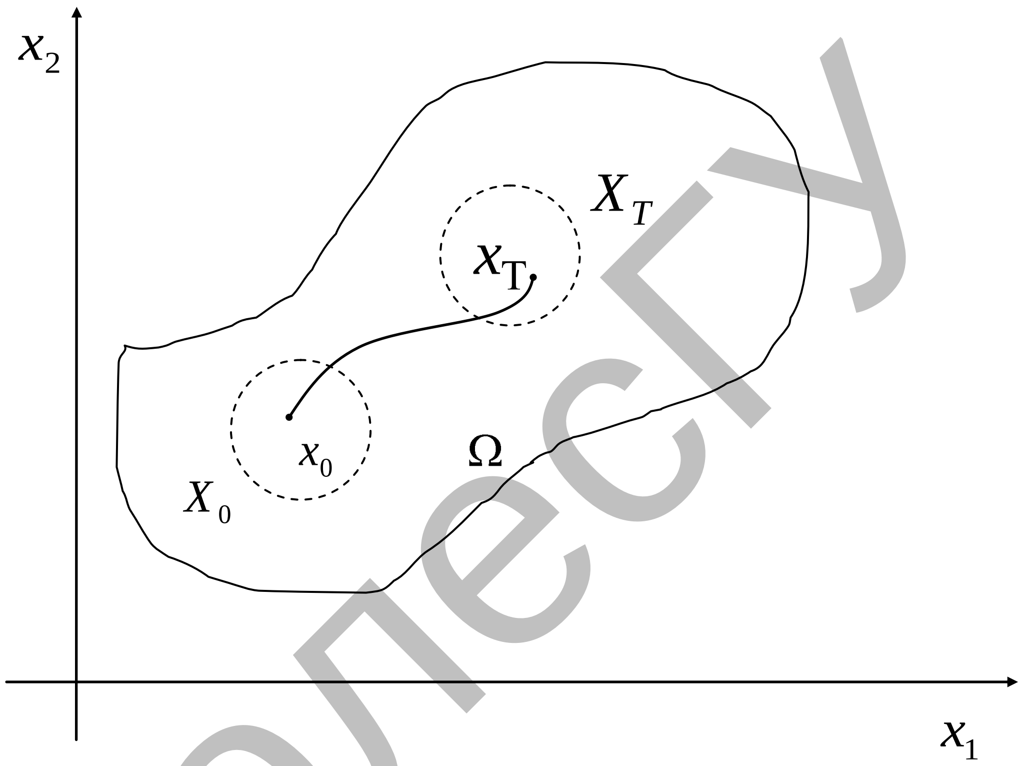

Рис. 5.1

Пусть Ω область возможных состояний, а точки $x_0, x_T \in \Omega$ начальное и конечное состояния системы. Для многих экономических задач не известно начальное либо конечное состояние, а известна область X_0 или X_T, которой эти точки принадлежат. Тогда допустимые управления переводят точки из области X_0 в X_T. Задача динамического программирования геометрически может быть сформулирована следующим образом: найти такую фазовую траекторию, начинающуюся в области X_0 и оканчивающуюся в области X_T, для которой ЦФ достигает экстремального значения. Если известны начальное и конечное состояния, то говорят о **задаче с закрепленными концами**. Если известны начальные и конечные области, то говорят о **задаче со свободными концами**.

5.3. Принципы динамического программирования

Суть метода динамического программирования – идея постепенной, пошаговой оптимизации. Оптимизация одного шага проще оптимизации всего процесса в целом. Если трудно оптимизировать сложную задачу, то следует разбить ее на ряд более простых. На каждом шаге оптимизируется задача меньшего размера. При этом принцип динамического программирования вовсе не предполагает, что каждый шаг оптимизируется изолированно, независимо от других. Напротив, пошаговое управление должно выбираться с учетом всех его последствий.

Таким образом, одним из условий применимости метода ДП является возможность разбиения процесса оптимизации решения на ряд однотипных шагов (этапов), каждый из которых планируется отдельно, но с учетом состояния системы на начало этапа и последствий принятого решения.

Исключение – последний шаг, который может планироваться без учета последствий. Он может быть изучен и спланирован сам по себе наилучшим образом, поскольку за ним нет больше этапов. Отсюда получаем одну из специфических особенностей динамического программирования: всю вычислительную процедуру целесообразно разворачивать от конца к началу. Раньше всех планируется последний *N*–й шаг, за ним *(N–1)*–й и т.д. Но как найти оптимальное управление u_N на *N*–м шаге, если оно определяется не только целью управления, но и состоянием системы на начало этого шага? Сделать это можно на основе предположений об ожидаемых исходах предшествующего, но ещё не исследованного этапа, т.е. о значениях x_{N-1}.

Для каждого возможного исхода x_{N-1} на *(N–1)*–м этапе находим оптимальное управление на *N*–м шаге. Такой набор оптимальных управлений, зависящих от возможных исходов предыдущего этапа, называется **условно–оптимальным решением** $u_N^*(x_{N-1})$. Завершив анализ конечного этапа, рассматриваем аналогичную задачу для предпоследнего этапа, требуя, чтобы функция цели достигала экстремального значения на двух последних этапах вместе. Это дает условно–оптимальное решение на предпоследнем этапе $u_{N-1}^*(x_{N-2})$, т.е. делаются всевозможные предположения о том, чем кончился предыдущий *(N–2)*–й шаг, и для каждого из предположений находится такое управление на *(N–1)*–м шаге, при котором эффект за последние два шага (из них последний уже оптимизирован) будет максимален. Тем самым мы найдем для каждого исхода *(N–2)*–го шага условно–оптимальное значение функции цели на *(N–1)* –м и условно–оптимальное значение функции цели на последних двух шагах. Проделав такой поиск условно–оптимальных управлений для каждого шага от конца к началу, найдем последовательность условно–оптимальных управлений $u_1^*(x_0)$, $u_2^*(x_1)$, ..., $u_N^*(x_{N-1})$.

Условно–оптимальные управления дают возможность найти оптимальное управление на каждом шаге. В самом деле, пусть начальное состояние x_0 известно. Тогда, проделав процедуру движения от конца к началу, находим $u_1^*(x_0)$. Так как начальное состояние x_0 определяется однозначно, то это оптимальное управление для первого шага. Вместе с тем находим экстремальное значение ЦФ относительно всего процесса. Зная оптимальное действие (с точки зрения всего процесса) для первого шага, выясним, к какому состоянию перейдет система в результате этого действия, т.е. найдем оптимальное состояние системы x_1^* на начало второго этапа. Но для всех возможных состояний на начало второго этапа выявлены оптимальные управления. Таким образом, зная x_1^*, установим оптимальное управление для второго этапа $u_2^*(x_1^*)$ и т.д. Проделав обратное движение по условно–оптимальным управлениям от начала к концу, найдем оптимальные управления для всех этапов.

Таким образом, в процессе оптимизации управления методом динамического программирования многошаговый процесс проходится дважды. Первый раз от конца к началу, в результате чего находятся условно–оптимальные управления и условно–оптимальное значение функции цели для каждого шага, в том числе оптимальное управление для первого шага и оптимальное значение функции цели для всего процесса. Второй раз от начала к концу, в результате чего находятся уже оптимальные управления на каждом шаге с точки зрения всего процесса.

Из качественного анализа идеи поэтапной оптимизации можно сформировать следующие принципы, лежащие в основе динамического программирования.

Принцип оптимальности. Оптимальное управление на каждом шаге определяется состоянием системы на начало этого шага и целью управления. Этот принцип имеет математическую интерпретацию, выражающуюся в составлении рекуррентных соотношений – функциональных уравнений Р. Беллмана.

Принцип погружения. Природа задачи, допускающей использование метода динамического программирования, не меняется при изменении количества шагов N, т.е. форма такой задачи инвариантна относительно N. В этом смысле всякий конкретный процесс с заданным числом шагов оказывается как бы погруженным в семейство подобных ему процессов.

5.4. Функциональные уравнения Беллмана

Будем считать, что начальное x_0 и конечное x_T состояния системы заданы. Обозначим через $f_1(x_0, u_1)$ значение функции цели на первом этапе при начальном состоянии системы x_0 и при управлении u_1, через $f_2(x_1, u_2)$ значение функции цели на втором этапе, …, через $f_N(x_{N-1}, u_N)$ значение функции цели на N–ом этапе. Тогда:

$$F = f(x_0, u) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x_{i-1}, u_i). \qquad (5.1)$$

Надо найти оптимальное управление $u^* = (u_1^*, u_2^*, ..., u_N^*)$, такое, что доставляет экстремум ЦФ (5.1) при ограничениях $u \in \Omega$, где Ω – область определения исходной задачи.

Введем обозначения: $\Omega_N, \Omega_{N-1,N}, ..., \Omega_{\overline{1,N}} \equiv \Omega$ – соответственно области определения для подобных задач на последнем этапе, двух последних и т.д., $F_1(x_{N-1}), F_2(x_{N-2}), ..., F_N(x_0)$ – условно–оптимальные значения ЦФ на последнем этапе, двух последних и т. д., на всех N этапах.

Начинаем с последнего этапа. Пусть x_{N-1} – возможные состояния системы на начало N–го этапа. Находим:

$$F_1(x_{N-1}) = \max_{u_N \in \Omega_N}(\min)\ f_N(x_{N-1}, u_N). \qquad (5.2)$$

Для двух последних этапов получаем:

$$F_2(x_{N-2}) = \max_{u_{N-1} \in \Omega_{N-1,N}}(\min)\ (f_{N-1}(x_{N-2}, u_{N-1}) + F_1(x_{N-1})), \qquad (5.3)$$

……………………………………………………..

$$F_N(x_0) = \max_{u_1 \in \Omega}(\min)\,(f_1(x_0, u_1) + F_{N-1}(x_1)). \qquad (5.4)$$

Выражение (5.4) представляет собой математическую запись принципа оптимальности. Выражения (5.2)–(5.4) называются функциональными уравнениями Беллмана. Отчетливо просматривается их рекуррентный (возвратный) характер, т.е. для нахождения оптимального управления на *N* шагах нужно знать условно–оптимальное управление на предшествующих *N–1* этапах и т.д. Поэтому функциональные уравнения часто называют рекуррентными (возвратными) соотношениями Беллмана.

5.5. Задача оптимального пути

Необходимо найти маршрут, связывающий города *A* и *B*, для которого суммарные затраты на перевозку груза были бы наименьшими. Сеть дорог, связывающая эти города, представляет собой ориентированный граф.

Для решения задачи методом ДП и записи рекуррентного соотношения разобьем все множество городов (вершин) на подмножества. В первое подмножество включим город *A* (вершину 1), во второе подмножество – вершины, в которые входят дуги, выходящие из вершины 1, в третье – вершины, в которые входят дуги, выходящие из вершин второго подмножества и т.д. Следовательно, процесс решения задачи нахождения оптимального маршрута разбивается на *n* этапов.

Перенумеруем этапы от конечной вершины сети к начальной и введем следующие обозначения: n – номер шага; c_{ij} – стоимость перевозки (расстояние) груза из города i в город j; $f_n(i)$ – минимальные затраты на перевозку груза из города i до конечного города, если до конечного города осталось n шагов; $j_n(i)$ – номер города, через который нужно ехать из города i, чтобы достичь $f_n(i)$. Здесь все обозначения несут важную смысловую нагрузку: f означает целевую функцию, i – состояние системы (номер города), индекс n несет динамическую информацию о том, что из города $\underline{i}$ до конечного города осталось n шагов.

Предположим, что груз доставлен в город B. Следовательно, число оставшихся шагов равно нулю, т.е. $n = 0$ и $f_n(i) = f_0(B) = 0$.

$n = 1$ – это последний шаг. Вычислим для него значение функции. Предположим, что в город B груз может быть доставлен или из города i_1, или из города i_2. Тогда затраты на перевозку из этих двух состояний:

$$f_1(i_1) = c_{i_1,B} + f_0(B), \text{ найдем } i \text{ и } j_1(i),$$
$$f_1(i_2) = c_{i_2,B} + f_0(B), \text{ найдем } i \text{ и } j_1(i).$$

$n = 2$. Предположим, что груз находится в городе s_1, или в городе s_2, или в s_3. Из города s_1 в город B груз можно провести или через город i_1, или из город i_2, поэтому оптимальный маршрут из города s_1 найдется из выражения

$$f_2(s_1) = \min_j (c_{s_1,i_1} + f_1(i_1); c_{s_1,i_2} + f_1(i_2)), \text{ найдем } i \text{ и } j_2(i).$$

Аналогично находим значения функции для s_2 и s_3.

Рекуррентное соотношение для n будет иметь вид:

$$f_n(i) = \min_{i,j} (c_{i,j} + f_{n-1}(j)).$$

5.6. Задача оптимального распределения средств

Пусть n предприятиям на расширение производства выделяются средства c. Известен прирост выпуска продукции по каждому предприятию $g_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, в зависимости от выделенной суммы x, $0 \le x \le c$.

Требуется так распределить средства c между n предприятиями, чтобы общий прирост выпуска продукции $f_n(c)$ был максимальным.

В соответствии с вычислительной схемой динамического программирования рассмотрим сначала случай $n=1$, т.е. все средства выделяются одному предприятию. Обозначим через $f_1(x)$ максимально возможный прирост выпуска продукции на этом предприятии, соответствующий выделенной сумме x. Каждому значению x соответствует определенное (единственное) значение $g_1(x)$ выпуска, поэтому можно записать, что

$$f_1(x) = \max(g_1(x)) = g_1(x).$$

Пусть теперь $n=2$, т.е. средства распределяются между двумя предприятиями. Если второму предприятию выделена сумма x, то прирост продукции на нем составит $g_2(x)$. Оставшиеся первому предприятию средства $(c-x)$ позволят увеличить прирост выпуска продукции до максимально возможного значения $f_1(c-x)$. При этом общий прирост выпуска продукции на двух предприятиях составит

$$g_2(x) + f_1(c-x).$$

Оптимальному значению $f_2(c)$ прироста продукции при распределении суммы c между двумя предприятиями соответствует такое x, при котором сумма последняя сумма максимальна. Это можно выразить записью

$$f_2(c) = \max_{0 \le x \le c}(g_2(x) + f_1(c-x)).$$

Значение $f_3(c)$ можно вычислить, если известны значения $f_2(c)$ и т.д.

Функциональное уравнение Беллмана для рассматриваемой задачи запишется в следующем виде:

$$f_n(c) = \max_{0 \le x \le c}(g_n(x) + f_{n-1}(c-x)).$$

Итак, максимальный прирост выпуска продукции на n предприятиях определяется как максимум суммы прироста выпуска на n–м предприятии и прироста выпуска на остальных $n–1$ предприятиях при условии, что оставшиеся после n–го предприятия средства распределяются между остальными предприятиями оптимально.

Имея функциональные уравнения, мы можем последовательно найти сначала f_1, затем $f_2, f_3, \dots$ и, наконец, f_{n-1} и f_n для различных значений распределяемой суммы средств.

Для отыскания оптимального распределения средств прежде всего находим величину $x_n^*(c)$ ассигнований n–му предприятию, которая позволяет достичь полученного нами максимального значения f_n прироста продукции. По величине оставшихся средств $c - x_n^*(c)$ и уже известному нам значению f_{n-1} устанавливаем $x_{n-1}^*(c)$ – величину ассигнований *(n–1)*–му предприятию и т.д. и, наконец, находим $x_2^*(c)$ и $x_1^*(c)$.

5.7. Планирование производственной программы

Требуется определить производственную программу изготовления продукции, удовлетворяющую спрос в каждом из месяцев планируемого периода и обеспечивающую минимальные затраты на производство и хранение продукции. Запас продукции на складе в конце планируемого периода должен быть равен нулю.

Рассмотрим период времени, состоящий из T месяцев. Для решения задачи методом ДП и записи рекуррентного соотношения будем использовать следующие обозначения:

- i_0 – запас продукции на складе на начало планируемого периода;
- t – номер планового отрезка времени, $t = \overline{1,T}$;
- D_t – спрос на продукцию в каждом из месяцев, $t = \overline{1,T}$;
- n – номер планового отрезка времени, соответствующий обратной нумерации месяцев;
- d_n – спрос на продукцию на n–м отрезке;
- i_n – уровень запаса на начало n–го отрезка;

- $x_n(i_n)$ – количество производства продукции на n–м отрезке, если уровень запасов на начало отрезка равен i_n единиц;
- j_n – уровень запаса на конец n–го отрезка;
- $c_n(x_n, j_n)$ – затраты, связанные с выпуском x_n единиц продукции на n–м отрезке и с содержанием запасов, объем которых на конец n–го отрезка равен j_n единиц;
- $f_n(i_n)$ – значение функции, равное затратам на производство и хранение продукции за n последних месяцев при условии, что уровень запасов на начало n–го месяца составляет i_n единиц.

Здесь $n = \overline{1, N}$, $N=T$.

Для наглядности плановый период изобразим на следующем рисунке:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & t=1 & & t=2 & & \ldots & & t=T & & \\
i_0 & & D_1 & & D_2 & & \ldots & & D_T & & j_T=0 \\
\text{-----}\oplus & \text{----------} & \oplus & \text{----------} & \oplus & \text{----------} & \oplus & \text{----------} & \oplus & \text{--------->} \\
 & & n=N & & n=N-1 & & \ldots & & n=1 & & \\
 & & d_N & & d_{N-1} & & \ldots & & d_1 & & \\
 & & x_N^*=? & & x_{N-1}^*=? & & \cdots & & x_1^*=? & &
\end{array}
$$

Отметим также, что общие затраты $c_t(x_t, j_t)$ состоят из затрат на производство $c_t(x_t)$ и затрат на хранение продукции $h \cdot j_t$, где h – затраты на хранение единицы продукции, j_t – запасы на конец месяца. В свою очередь затраты на производство $c_t(x_t)$ складывают из условно–постоянных k и пропорциональных $l \cdot x_t$. Следовательно, можем записать

$$c_t(x_t, j_t) = k + l \cdot x_t + h \cdot j_t,\ t = \overline{1, T}.$$

Складские площади предприятия ограничены, и хранить можно не более M единиц продукции. Производственные мощности также ограничены, и в каждом месяце можно изготовить не более B единиц продукции.

Процесс решения такой задачи является многошаговым. Шагом управления или планирования здесь будет месяц. Управление процессом состоит в количестве изготовления машин в каждом месяце.

Так как уровень запасов на конец планового периода должен быть равен нулю, то для $n = 0$, $f_0(0) = 0$.

Перейдем к рассмотрению первого отрезка, *n=1*. Запас i_1 на начало этого отрезка неизвестен. Однако ясно, что он может быть равен любому неотрицательному целому числу, не превышающему вместимости склада *M* и спроса в рассматриваемом отрезке d_1, т.е. не должен превышать $\min(d_1, M)$. Для полного удовлетворения спроса на последнем отрезке объем производства должен быть равен $x_1 = d_1 - i_1$. Следовательно,

$$f_1(i_1) = c_1(x_1, j_1) = c_1(d_1 - i_1, j_1) = c_1(d_1 - i_1, 0),$$

$$\text{где } i_1 = 0, 1, ..., \min(d_1, M).$$

Перейдем ко второму шагу, *n=2*. Уровень запасов на начало второго отрезка равен i_2. При этом величина i_2 может принимать любые неотрицательные целочисленные значения, не превышающие $\min(d_1 + d_2, M)$. Целочисленные значения x_2 (объем выпуска) во втором отрезке при заданном i_2 должны быть не меньше, чем $d_2 - i_2$, так как спрос на данном отрезке должен быть удовлетворен, но не больше $\min(d_1 + d_2 - i_2, B)$, так как запас на конец планового периода равен нулю и производство продукции в любом отрезке не превышает *B*. Минимальные суммарные затраты на производство и хранение продукции за два последних месяца составят:

$$f_2(i_2) = \min_{x_2}(c_2(x_2, i_2 + x_2 - d_2) + f_1(i_2 + x_2 - d_2)),$$

$$\text{где } i_2 = 0, 1, ..., \min(d_1 + d_2, M), \;\; d_2 - i_2 \le x_2 \le \min(d_1 + d_2 - i_2, B).$$

Общее рекуррентное соотношение имеет вид:

$$f_n(i_n) = \min_{x_n}(c_n(x_n, i_n + x_n - d_n) + f_{n-1}(i_n + x_n - d_n)), \; n = \overline{1, N},$$

$$\text{где } i_n = 0,1,\ldots,\min(d_1 + d_2 + \ldots + d_n, M),$$
$$d_n - i_n \le x_n \le \min(d_1 + d_2 + \ldots + d_n - i_n, B).$$

В последнем выражении величина $i_n + x_n - d_n = j_n$ характеризует уровень запасов на конец отрезка n.

Заметим, что, поскольку уровень запасов i_n на начало каждого месяца, за исключением первого, неизвестен, необходимо учесть все возможные его значения и произвести поочередно вычисления:

$$f_1(i_1), \; i_1 = 0,1,\ldots,\min(d_1, M),$$
$$f_2(i_2), \; i_2 = 0,1,\ldots,\min(d_1 + d_2, M),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f_{N-1}(i_{N-1}), \; i_{N-1} = 0,1,\ldots,\min(d_1 + d_2 + \ldots + d_{N-1}, M),$$
$$f_N(i_0), \; i_0 \text{ – известная величина.}$$

На основании полученных расчетов находится объем выпуска продукции в каждом месяце, соответствующий оптимальному решению задачи.

Для первого месяца планового периода он равен $x_N(i_0)$ и позволяет достичь $f_N(i_0)$.

Уровень запасов на начало второго месяца $i_{N-1} = i_0 + x_N(i_0) - d_N$, а объем выпуска во втором месяце $x_{N-1}(i_{N-1})$.

Рассматривая таким образом плановые отрезки до конца планового периода, находим объем выпуска в каждом из месяцев.

5.8. Оптимальная политика замены оборудования

Пусть в начале планового периода продолжительностью T лет имеется некоторое оборудование возраста t. Ежегодно производится продукция стоимостью *r(t)*. При этом оборудование требует эксплуатационных затрат *u(t)* и имеет остаточную стоимость *s(t)*. В любой год оборудование можно сохранить или продать по остаточной стоимости и купить новое по цене p.

Требуется разработать оптимальную политику замены оборудования исходя из условия максимизации ожидаемой прибыли за период времени длительностью T лет.

В соответствии с общей концепцией динамического программирования начнем процесс оптимизации с конца планового периода, т.е. рассмотрим сначала последний год периода. Введем функцию условно–оптимальных значений функции цели $F_k(t)$, которая показывает максимальную прибыль, получаемую от оборудования возраста t лет за последние k лет планового периода. Здесь возраст оборудования рассматривается в направлении естественного хода времени. Например, $t=0$ соответствует использованию совершенно нового оборудования. Временные же шаги процесса нумеруются в обратном порядке. Например, при $k=1$ рассматривается последний год планового периода, при $k=2$ – два последних года и т.д., при $k=T$ – последние T лет, т.е. весь плановый период.

В этой задаче систему составляет оборудование. Ее состояние характеризуется возрастом. Вектор управления – это решение в момент $t=0,1,2,\dots,T$, о сохранении или замене оборудования. Для нахождения оптимальной политики замен следует проанализировать, согласно принципу оптимальности, процесс от конца к началу. Для этого сделаем предположение о состоянии оборудования на начало последнего года, $k=1$. Пусть оборудование имеет возраст t лет.

Имеются две возможности:

1) сохранить оборудование, тогда прибыль за последний год составит $r(t)-u(t)$;

2) продать оборудование по остаточной стоимости и купить новое, тогда прибыль за последний год будет равна $s(t)-p+r(0)-u(0)$, где $r(0)$ – стоимость продукции, выпущенной на новом оборудовании за первый год ее ввода, $u(0)$ – эксплуатационные расходы в этом году.

Для последнего года $(k=1)$ оптимальной политикой с точки зрения всего процесса будет политика, обеспечивающая максимальную прибыль только за последний год. Учитывая значение прибыли при различном образе действия (замена–

сохранение), приходим к выводу, что решение о замене оборудования возраста t лет следует принять в случае, когда прибыль от нового оборудования на последнем периоде больше, чем от старого, т.е. при условии

$$s(t) - p + r(0) - u(0) > r(t) - u(t).$$

Если же

$$s(t) - p + r(0) - u(0) \leq r(t) - u(t),$$

то старое оборудование целесообразно сохранить.

Итак, для последнего года оптимальная политика и максимальная прибыль $F_1(t)$ находятся из условия:

$$F_1(t) = \max_t \begin{cases} r(t) - u(t), & \textit{сохранение}, \\ s(t) - p + r(0) - u(0), & \textit{замена}. \end{cases}$$

Пусть *k=2*, т.е. рассмотрим прибыль за два последних года. Делаем предположение о возможном состоянии t оборудования на начало предпоследнего года. Если в начале этого года принять решение о сохранении оборудования, то к концу года будет получена прибыль $r(t) - u(t)$. На начало последнего года оборудование перейдет в состояние *t+1*, и при оптимальной политике в последнем году оно принесет прибыль, равную $F_1(t+1)$. Таким образом, общая прибыль за два года составит

$$r(t) - u(t) + F_1(t+1).$$

Если же в начале предпоследнего года будет принято решение о замене оборудования, то прибыль за последний год составит

$$s(t) - p + r(0) - u(0).$$

Поскольку приобретено новое оборудование, на начало последнего года оно будет в состоянии *t=1*. Следовательно, общая прибыль за последние два года при оптимальной политике в последнем году составит

$$s(t) - p + r(0) - u(0) + F_1(1).$$

Условно–оптимальной в последние два года будет политика, доставляющая максимальную прибыль:

$$F_2(t) = \max_t \begin{cases} r(t) - u(t) + F_1(t+1), & \textit{сохранение}, \\ s(t) - p + r(0) - u(0) + F_1(1), & \textit{замена}. \end{cases}$$

Аналогично находим выражения для условно–оптимальной прибыли за три последних года, четыре и т.д. Общее функциональное уравнение примет вид:

$$F_k(t) = \max_t \begin{cases} r(t) - u(t) + F_{k-1}(t+1), & \textit{сохранение}, \\ s(t) - p + r(0) - u(0) + F_{k-1}(1), & \textit{замена}. \end{cases}$$

Если начальное состояние t_0 (возраст оборудования) известно, то при $k=T$ получим:

$$F_T(t_0) = \max_t \begin{cases} r(t_0) - u(t_0) + F_{T-1}(t_0+1), & \textit{сохранение}, \\ s(t_0) - p + r(0) - u(0) + F_{T-1}(1), & \textit{замена}. \end{cases}$$

Так как начальное состояние t_0 известно, из выражения для $F_T(t_0)$ находим оптимальное решение в начале первого года, потом вытекающее из него оптимальное решение для второго года и т.д.

6. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ (НП)

6.1. Графический метод решения задачи НП

Задача математического программирования

$$\max(\min) F = f(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{6.1}$$

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n)\{\le, =, \ge\} b_i, \; i = \overline{1, m}, \tag{6.2}$$

$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1, n}. \tag{6.3}$$

в которой либо ЦФ (6.1), либо ограничения (6.2), либо и то и другое нелинейны, называется **нелинейной**.

В евклидовом пространстве E_n система ограничений (6.2) определяет область допустимых решений задачи. В отличие от задачи ЛП, она не всегда является выпуклой.

Если определена область допустимых решений, то нахождение решения задачи (6.1)–(6.3) сводится к определению такой точки этой области, через которую проходит гиперплоскость наивысшего (наинизшего) уровня. Указанная точка может находиться как на границе области допустимых решений, так и внутри её.

Нахождение решения задачи НП с использованием геометрической интерпретации включает четыре этапа:

1) Находится область допустимых решений задачи, если она пуста, то задача не имеет решения.

2) Строится гиперплоскость $f(x_1, x_2, ..., x_n) = h$.

3) Определяется гиперплоскость наивысшего (наинизшего) уровня или устанавливается неразрешимость задачи из–за неограниченности ЦФ сверху (снизу).

4) Находится точка ОДР, через которую проходит гиперплоскость наивысшего (наинизшего) уровня, и определяется в ней значение ЦФ.

6.2. Метод множителей Лагранжа

Рассмотрим классическую задачу оптимизации:

$$\max(\min) F = f(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{6.4}$$

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i, \;\; i = \overline{1, m}. \tag{6.5}$$

Эта задача является частным случаем общей задачи нелинейного программирования. В ней система ограничений (6.5) содержит только уравнения, отсутствуют условия неотрицательности переменных, их дискретности, $m<n$, функции $f(X)$ и $\varphi_i(X)$, $i = \overline{1, m}$, непрерывны и имеют частные производные по крайней мере второго порядка.

Чтобы найти решение задачи (6.4), (6.5) строится функция Лагранжа, безусловный экстремум которой совпадает с условным экстремумом функции f:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) =$$

$$= f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n)), \tag{6.6}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – неопределенные множителями Лагранжа.

Запишем необходимые условия экстремума функции Лагранжа. Для этого найдем ее частные производные по неизвестным параметрам x_j, $j = \overline{1, n}$, и λ_i, $i = \overline{1, m}$, и приравняем их нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \;\; i = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{6.7}$$

Решив систему уравнений (6.7), получим все стационарные точки, в которых функция (6.4) может иметь экстремальные значения.

Определение точки экстремума функции $f(X)$ на основании исследования знака второго дифференциала функции Лагранжа (достаточных условий). Например, функция $f(x_1, x_2)$ имеет в стационарной точке (x_1, x_2, λ) условный максимум, если в ней $d^2 L < 0$, и условный минимум, если $d^2 L > 0$.

Таким образом, определение экстремальных точек задачи (6.4), (6.5) методом множителей Лагранжа включает следующие этапы:

1) составляем функцию Лагранжа;

2) находим частные производные функции Лагранжа по переменным x_j, $j=\overline{1,n}$, и λ_i, $i=\overline{1,m}$, и приравниваем их нулю;

3) решаем систему (6.7), состоящую из $m+n$ уравнений, и находим все стационарные точки;

4) среди стационарных точек с помощью достаточных условий определяем точки экстремума функции.

Экономический смысл множителей Лагранжа. Рассмотрим простейшую задачу оптимизации:

$$\max(\min) F = f(x_1, x_2), \tag{6.8}$$

$$\varphi(x_1, x_2) = b. \tag{6.9}$$

Предположим, что условный экстремум достигается в точке $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ и $F^* = f(x_1^*, x_2^*)$.

Допустим, что в ограничении (6.9) величина b может изменяться. Тогда координаты точки экстремума x_1^* и x_2^*, а, следовательно, и экстремальное значение функции F^* будут величинами, зависящими от b, т. е. $x_1^* = x_1^*(b)$, $,x_2^* = x_2^*(b)$, $F^* = f(x_1^*(b), x_2^*(b))$. Тогда производная функции (6.8) имеет вид:

$$\frac{dF^*}{db} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1^*}{db} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2^*}{db}. \tag{6.10}$$

С другой стороны, в силу равенства (6.9) $\varphi(x_1^*(b), x_2^*(b)) = b$, откуда после дифференцирования имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{dx_1^*}{db} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\frac{dx_2^*}{db} = 1. \tag{6.11}$$

Кроме того, в точке экстремума X^* выполняются необходимые условия (6.7). Из этих равенств для $n=2$ и $m=1$ получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}. \tag{6.12}$$

Подставляя (6.12) в (6.10) и учитывая (6.11), получим

$$\frac{dF^*}{db} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{dx_1^*}{db} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{dx_2^*}{db} = \lambda \cdot 1 \quad \text{или} \quad \frac{dF^*}{db} = \lambda.$$

Для задачи (6.4)–(6.5) аналогично получаем

$$\frac{dF^*}{db} = \lambda_i, \ i = \overline{1,m}.$$

Если F интерпретировать как доход или стоимость, а b_i – как объемы некоторых ресурсов, то множители Лагранжа λ_i показывают, как изменится максимальных доход (или минимальная стоимость), если количество i–го вида ресурса увеличится на единицу.

6.3. Градиентные методы

Градиентные методы можно использовать для решения любой задачи нелинейного программирования. Но применение этих методов позволяет найти только точку локального экстремума. Поэтому наиболее целесообразно использовать градиентные методы для нахождения решения задач выпуклого программирования, в которых всякий локальный экстремум является одновременно и глобальным.

В качестве основной в теории выпуклого программирования рассматривается задача отыскания вектора $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, который удовлетворяет условиям:

$$\varphi_i(X) \le b_i, \ i = \overline{1,m}, \quad x_j \ge 0, \ j = \overline{1,n},$$

и доставляет глобальный минимум функции $F = f(X)$, где функции f и φ_i, $i = \overline{1,m}$, являются гладкими и выпуклыми.

Если f – вогнутая функция, а φ_i – выпуклые функции, то получаем соответственно следующую задачу: найти вектор $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, который удовлетворяет условиям $\varphi_i(X) \le b_i$, $i = \overline{1,m}$, и $x_j \ge 0$, $j = \overline{1,n}$, доставляющий глобальный максимум функции $F = f(X)$.

Множество точек $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условиям сформулированных задач, является **выпуклым**.

Если функция $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируема в точке $X_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, то градиентом функции $f(X)$ в точке X_0 называется n–мерный вектор

$$grad f(X_0) = \nabla f(X_0) = \left(\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X_0)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f(X_0)}{\partial x_n} \right).$$

Градиент в каждой точке X_0, в которой он существует, направлен по нормали к линии уровня поверхности $f(X)$ и показывает направление наискорейшего возрастания функции в данной точке. Если градиент отличен от нуля, то он указывает направление, небольшое перемещение по которому будет увеличивать значение функции $f(X)$.

Вектор $-\nabla f(X_0)$, противоположный градиенту, называется **антиградиентом** и указывает направление наискорейшего убывания функции $f(X)$.

Для выпуклой функции необходимым и достаточным условием оптимальности точки $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ является равенство нулю градиента функции в этой точке, т.е. $\nabla f(X^*) = 0$.

Градиентный метод основан на простой идее. Если заранее известно, что функция $f(X)$ имеет в допустимой области единственный экстремум, то поиск точки, в которой он достигается, целесообразно проводить следующим образом. В области допустимых решений берется произвольная точка X_0. С помощью градиента (антиградиента) определяется направление, в котором функция $f(X)$ возрастает (убывает) с наибольшей скоростью. Сделав небольшой шаг в найденном направлении, переходим в новую точку X_1. Потом опять определяем наилучшее направление для перехода в очередную точку X_2 и т.д. Таким образом, построим последовательность точек X_0, X_1, X_2, …, которая будет сходиться к точке экстремума X^*, т.е. для точек последовательности будут выполняться условия

$$f(X_0) < f(X_1) < f(X_2) < \ldots \; (f(X_0) < f(X_1) < f(X_2) < \ldots).$$

Величина шага перехода из точки X_k в X_{k+1} по направлению градиента $\nabla f(X_k)$ определяется значением параметра λ_k в уравнении прямой

$$X_{k+1} = X_k + \nabla f(X_k)\lambda_k \; (X_{k+1} = X_k - \nabla f(X_k)\lambda_k),$$

проходящей через точку X_k параллельно градиенту (антиградиенту). Значение шага λ_k определяется из уравнения $\nabla f(X_{k+1})\nabla f(X_k) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов, А.В. Высшая математика: Мат. программир.: учеб. / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод; под общ. ред. А.В. Кузнецова. – Минск: Выш. шк., 2001. – 351 с.
2. Кузнецов, А.В. Руководство к решению задач по математическому программированию: учеб. пособие / А.В. Кузнецов, Н.И. Холод, Л.С. Костевич; под общ. ред. А.В. Кузнецова. – Минск: Выш. шк., 2001. – 448 с.
3. Сборник задач и упражнений по высшей математичке: Мат. программирование: учеб. пособие / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод; под общ. ред. А.В. Кузнецова, Р.А. Рутковского. – Минск: Выш. шк., 2002. – 447 с.
4. Математическое программирование: информационные технологии оптимальных решений: учеб. пособие / Л.С. Костевич. – Минск: Новое знание, 2003. – 424 с.
5. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие / П.А. Павлов. – Пинск: ПолесГУ, 2009. – 69 с.

Учебное издание

Павлов Павел Александрович

Высшая математика.
Математическое программирование

Учебно-методическое пособие

Ответственный за выпуск *П.С. Кравцов*

Публикуется в авторской редакции

Подписано в печать 12.05.2011 г. Формат 60х84/16.
Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс». Ризография.
Усл. печ. л. 4,48. Уч.-изд. л. 2,07.
Тираж 550 экз. Заказ № 1534.

Отпечатано в редакционно-издательском отделе
Полесского государственного университета.
225710, г. Пинск, ул. Днепровской флотилии, 23.