Национальный банк Республики Беларусь
УО ”Полесский государственный университет“

М.А. РОМАНОВА, Л.Н. БАЗАКА

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Сборник задач
для студентов нематематических специальностей
всех форм обучения и слушателей факультета
повышения квалификации и переподготовки кадров

Пинск
ПолесГУ
2013

УДК 517.2
ББК 22.161.1
Р 69

Р е ц е н з е н т ы :
кандидат физико-математических наук, доцент А.Л. Ильин;
кандидат экономических наук И.А. Янковский

У т в е р ж д е н о
научно-методическим советом ПолесГУ

Романова, М.А.
Р 69 Высшая математика. Дифференциальное исчисление и его приложения: сборник задач / М.А. Романова, Л.Н. Базака. – Пинск: ПолесГУ, 2013. – 68 с.

ISBN 978-985-516-238-5

Содержит краткие теоретические положения, примеры решения и задачи по основным разделам дифференциального исчисления и его приложений. Рекомендуется для использования при проведении практических (лабораторных) занятий по высшей математике и компьютерным информационным технологиям, а также для самостоятельной подготовки.

Предназначен для студентов нематематических специальностей всех форм обучения и слушателей факультета повышения квалификации и переподготовки кадров.

УДК 517.2
ББК 22.161.1

ISBN 978-985-516-238-5

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Настоящее пособие представляет собой сборник задач, предлагаемых студентам различных нематематических специальностей на занятиях по дисциплинам «Высшая математика» и «Компьютерные информационные технологии». Сборник также содержит основные положения теории дифференциального исчисления и его приложений, а также достаточное количество примеров решения заданий.

Сборник состоит из трех глав. Первая глава посвящена разделу «Дифференциальное исчисление функции одной переменной». Здесь рассмотрены следующие вопросы: производная и дифференциал функции одной переменной, уравнения касательной и нормали к кривой, дифференцирование неявно заданных функций и логарифмическое дифференцирование, производные и дифференциалы высших порядков, правило Лопиталя-Бернулли и применение его к нахождению предела функции, применение производной при исследовании графиков функций, вычисление наибольшего и наименьшего значения функции.

Вторая глава содержит материал из раздела «Дифференциальное исчисление функций многих переменных». Здесь рассмотрены следующие темы: частные производные и частные дифференциалы первого порядка, полный дифференциал, приближенное вычисление с помощью дифференциала, частные производные второго и более высокого порядка функций многих переменных, экстремум функции многих переменных, условный экстремум, наибольшее и наименьшее значения функции в ограниченной замкнутой области.

Третья глава рассматривает различные возможности решения задач дифференциального исчисления с помощью пакетов прикладных программ: *Maple V*, *Mathematica*, *Mathcad*, а также с помощью надстройки *Microsoft Mathematics* и некоторых онлайн сервисов.

ГЛАВА 1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1 Производная, ее геометрический, физический и экономический смысл. Правила дифференцирования. Таблица производных. Уравнения касательной и нормали к кривой

Пусть $x_0 = x$ и $x_1 = x + \Delta x$ — значения независимой переменной. Здесь Δx называется *приращением аргумента* x.

Определение. *Приращением функции* на отрезке $[x, x + \Delta x]$ называется разность $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Определение. Выражение

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \qquad (1)$$

если оно имеет смысл, называется *производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x и обозначается одним из символов: y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$.

Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x, а операция нахождения $f'(x)$ — *дифференцированием*.

Геометрический смысл производной: производная $f'(x_0)$ равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 (см. рис. 1), т.е. $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$.

Предположим, что функция $y = f(x)$ характеризует

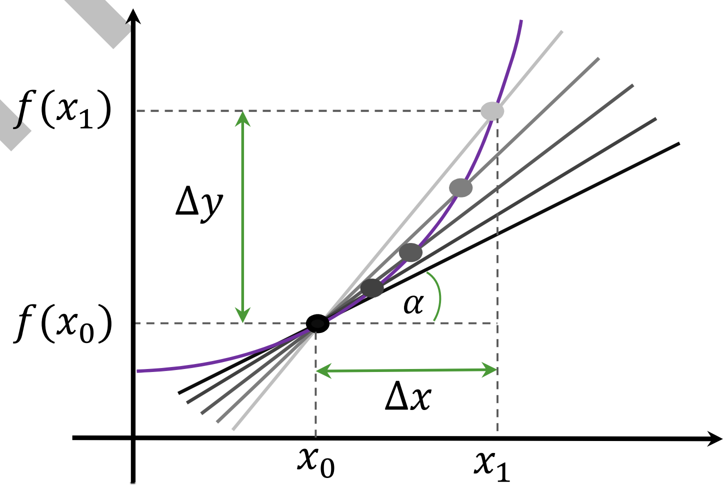

Рис. 1. Секущие и касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0

закон движения материальной точки.

Физический смысл производной заключается в том, что производная $f'(x_0)$ численно равна мгновенной скорости этой материальной точки в момент времени x_0.

Экономический смысл производной заключается в том, что производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительного другого исследуемого фактора.

Если C — произвольная постоянная, а $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие

Правила дифференцирования:

1) $(C)' = 0$;

2) $(x)' = 1$;

3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

4) $(Cu)' = Cu'$;

5) $(uv)' = u'v + uv'$;

6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\ (v \neq 0)$;

7) $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}\ (v \neq 0)$;

8) если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, т.е. $y = f\big(\varphi(x)\big)$ — сложная функция, составленная из дифференцируемых функций, то

$$y_x{}' = y_u{}' u_x{}' \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx};$$

9) если для функции $y = f(x)$ существует обратная дифференцируемая функция $x = g(y)$ и $\frac{dg}{dy} = g'(y) \neq 0$, то

$$f'(x) = 1/g'(y).$$

Пусть α — действительное число. Тогда на основании определения производной и правил дифференцирования можно составить *таблицу производных основных элементарных функций:*

1) $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1}\, u'$;

2) $(\alpha^{u})' = \alpha^{u} \ln \alpha\, u'$;

3) $(e^{u})' = e^{u}\, u'$;

4) $(\log_{\alpha} u)' = \frac{1}{u \ln \alpha} \cdot u'$;

5) $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;

6) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

7) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

8) $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;

9) $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;

10) $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

11) $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

12) $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

13) $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение нормали (перпендикуляра) к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет вид:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0).$$

При $f'(x_0) = 0$ уравнение нормали имеет вид $x = x_0$.

Пример 1. Найти производную функции $y = \frac{x}{3x+1}$, воспользовавшись определением производной (см. формулу (1)).

Решение. При любом приращении Δx имеем:

$$\Delta y = \frac{(x+\Delta x)}{3(x+\Delta x)+1} - \frac{x}{3x+1} =$$

$$= \frac{3x^2 + 3x\Delta x + x + \Delta x - 3x^2 - 3x\Delta x - x}{(3(x+\Delta x)+1)(3x+1)} =$$

$$= \frac{\Delta x}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)}.$$

Так как

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)},$$

то

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)} = \frac{1}{(3x+1)^2}.$$

Пример 2. Выяснить, имеет ли функция $y = |x|$ производную в точке $x = 0$.

<u>Решение.</u> При любом приращении независимой переменной x, равном Δx, приращение функции Δy в точке $x = 0$ вычисляется так:

$$\Delta y = |\Delta x| = \begin{cases} -\Delta x, \text{если } \Delta x < 0, \\ \Delta x, \text{если } \Delta x > 0. \end{cases}$$

Из определения производной следует, что

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} -1, \text{если } \Delta x < 0, \\ 1, \text{если } \Delta x > 0. \end{cases}$$

Это означает, что в точке $x = 0$ функция $y = |x|$ не имеет производной, хотя она и непрерывна в этой точке.

Замечание. Пример 2 показывает, что не всякая функция, непрерывная в некоторой точке x, дифференцируема в этой точке. Но любая функция является непрерывной в тех точках, в которых она дифференцируема.

Далее рассмотрим пример применения производной в экономике. Пусть функция $y = f(x)$ задает издержки производства, где x — количество выпускаемой продукции. Обозначим Δx — прирост продукции, тогда Δy —

приращение издержек производства, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ — среднее приращение издержек производства на единицу продукции. Производная $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ — выражает *предельные издержки* производства и приближенно характеризует дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции.

Аналогичным образом могут быть определены предельная *выручка,* предельный *доход,* предельный *продукт*, предельная *полезность,* предельная *производительность* и другие предельные величины.

Пример 3. Зависимость между издержками производства y и объемом выпускаемой продукции x задается функцией $y = 70x - 0{,}1x^3$ денежных единиц. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции 10 единиц.

Решение. Функция средних издержек (на единицу продукции) выражается так: $y_{\text{ср}} = \frac{y}{x} = 70 - 0{,}1x^2$. При $x = 10$ получаем $y_{\text{ср}}(10) = 70 - 0{,}1 \cdot 10^2 = 60$ ден. ед. Функция предельных издержек выражается производной $y'(x) = 70 - 0{,}3x^2$, при $x = 10$ предельные издержки составят $y'(10) = 70 - 0{,}3 \cdot 10^2 = 40$ ден. ед.

Ответ: средние издержки на производство единицы продукции составили 60 ден. ед., предельные издержки, т.е. дополнительные затраты на производство дополнительной единицы продукции при объеме выпускаемой продукции 10 ед. составили 40 ден. ед.

Задания для решения

1) Найти производную функции $y = 2x^2 + x - 5$, используя определение производной.

Используя формулы и правила дифференцирования, в заданиях 2-39 найти производные следующих функций:

2) $y = 5x^4 - 3\sqrt[7]{x^3} + 7/x^5 + 4$;

3) $y = x^3 \sin x$;

4) $y = (x^4 + 1)/(x^4 - 1)$;

5) $y = (x^5 + 3x - 1)^4$;

6) $y = \sqrt[3]{((x^3+1)/(x^3-1))^2};$

7) $y = 3x^3 + 5\sqrt[3]{x^5} - 4/x^3;$

8) $y = x^3 \sin x \cdot \ln x;$

9) $y = \sqrt{(x^3+1)/(x^3-1)};$

10) $y = \sqrt[7]{x^5} - 2/x^4 + 7x^6;$

11) $y = (x^9+1)\cos 5x;$

12) $y = ((x^4+1)/(x^4-1))^3;$

13) $y = 4\sqrt{x} + 4/\sqrt{x} + 3x^2;$

14) $y = x^3 \operatorname{tg} x \cdot e^{2x};$

15) $y = (\sin^2 x)/(x^3+1);$

16) $y = x^3 \sin 3x;$

17) $y = e^x \operatorname{tg} 4x;$

18) $y = \sqrt[3]{x^4 + \sin^4 x};$

19) $y = x\operatorname{ctg}^2 7x;$

20) $y = 2^{-\cos^4 5x};$

21) $y = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}};$

22) $y = (2^{x^4} - \operatorname{tg}^4 x)^3;$

23) $y = \ln^5(x - 2^{-x});$

24) $y = \sin(\operatorname{tg}\sqrt{x});$

25) $y = x\sin^2 x \cdot 2^{x^2};$

26) $y = 2^{x/\ln x};$

27) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2};$

28) $y = e^{-\sqrt{x^2+2x+2}};$

29) $y = \sin^3 x^2;$

30) $y = (2^{\operatorname{tg} 3x} + \operatorname{tg} 3x)^2;$

31) $y = 3^{\operatorname{tg}^3 5x};$

32) $y = x\sin^3 3x;$

33) $y = \sqrt{\dfrac{\cos^2 x+1}{\sin 2x+1}};$

34) $y = (2^{\cos 3x} + \sin 3x)^3;$

35) $y = x\cos^2 x \cdot e^{x^2};$

36) $y = x^3 e^{\lg 3x};$

37) $y = (\sin^3 x + \cos^3 2x)^2;$

38) $y = \ln(x^4 - \sin^3 x);$

39) $y = x \sin 7x \cdot \operatorname{tg}^2 x$.

40) Объем продукции y (усл. ед.) цеха в течение рабочего дня задан функцией $y = -x^3 - 4x^2 + 60x + 260$, где x — время в часах. Найти производительность труда через 2 часа после начала работы.

41) Зависимость между издержками производства y (ден. ед.) и объемом выпускаемой продукции x (ед.) выражается функцией $y = 15x - 0{,}05x^3$. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции, равном 10 ед.

42) Вычислить $y'(0)$, $y'\left(\frac{1}{2}\right)$, $y'(-3)$ для функции $y = 2 + x - x^2$.

43) При каких значениях x, $y'(x) = 0$, если $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$.

44) Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 + 2x - 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

45) Записать уравнения касательной и нормали к кривой $y = \ln(x^2 - 4x + 4)$ в точке $x_0 = 1$.

46) Воспользовавшись определением производной, найти производную функции $y = (3x - 1)/(2x + 5)$.

47) Расстояние, пройденное материальной точкой за время t с, $s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + 2t + 1$ (s – в метрах). Найти скорость движения данной точки в моменты времени $t = 0; 1; 2$ с.

1.2 Дифференцирование функций, заданных неявно. Логарифмическое дифференцирование

Если дифференцируемая функция y есть неявная функция от x, т.е. задана уравнением $f(x, y) = 0$, не разрешенным относительно y, то для нахождения производной $\frac{dy}{dx}$ нужно продифференцировать по x обе части равенства, помня, что $y = y(x)$, и затем выразить из полученного равенства искомую производную. Как правило, она будет зависеть от x и y, т.е. $\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$.

Пример 4. Найти y', для функции, заданной неявно уравнением $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Решение. Дифференцируем по x обе части равенства, не забывая, что y есть функция от x, получим:

$$\frac{2x}{4} - \frac{2yy'}{9} = 0.$$

Отсюда найдем $y' = \frac{9x}{4y}$.

Определение. *Логарифмической производной* функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т. е.

$$(\ln f(x))' = f\,'(x)/f(x).$$

Последовательное применение логарифмирования и дифференцирования функций называют *логарифмическим дифференцированием.* В некоторых случаях предварительное логарифмирование функции упрощает нахождение ее производной. Например, при нахождении производной степенно-показательной функции $y = u^v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$, предварительное логарифмирование приводит к формуле

$$y' = u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1} \cdot u'.$$

Пример 5. Найти производную функции $y = (\sin x)^{x^2}$.

Решение. Логарифмируя данную функцию, получаем

$$\ln y = x^2 \ln \sin x.$$

Дифференцируем обе части последнего равенства по x:

$$(\ln y)' = (x^2)' \ln \sin x + x^2 (\ln \sin x)'.$$

Отсюда

$$\frac{y'}{y} = 2x \ln \sin x + x^2 \frac{1}{\sin x} \cos x.$$

Далее,

$$y' = y(2x \ln \sin x + x^2 \operatorname{ctg} x).$$

Окончательно получим:

$$y' = (\sin x)^{x^2} (2x \ln \sin x + x^2 \operatorname{ctg} x).$$

Задания для решения

В заданиях 48-52 найти производные функций, заданных неявно уравнениями:

48) $5x^2 + 3xy - 2y^2 + 2 = 0$;

49) $xy - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} = 2$;

50) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 2$;

51) $e^{x^2y^2} - x^4 + y^4 = 1$;

52) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$.

В заданиях 53-57 найти производные степенно-показательных функций:

53) $y = (\sin 2x)^{\cos 5x}$;

54) $y = (\operatorname{tg} 3x)^{x^4}$;

55) $y = (1 + x^4)^{\operatorname{tg} 7x}$;

56) $y = (\operatorname{ctg} 5x)^{x^3-1}$;

57) $y = (x^3 + 1)^{\operatorname{tg} 2x}$.

1.3 Производные высших порядков

Определение. *Производной второго порядка* или *второй производной функции* $y = f(x)$ называется производная от ее первой производной, т. е. $(y')'$.

Обозначается вторая производная одним из следующих символов: y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Пусть $s = s(t)$ — закон прямолинейного движения материальной точки, тогда $s' = \frac{ds}{dt}$ — скорость, а $s'' = \frac{d^2s}{dt^2}$ — ускорение этой точки.

Производной n-го порядка функции $y = f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка данной функции.

Для n-й производной употребляются следующие обозначения: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$. Следовательно,

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = \frac{dy^{(n-1)}}{dx}.$$

Пример 6. Найти производную второго порядка функции $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$.

Решение. Имеем:

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{(x + \sqrt{x^2 + a^2})\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

$$y'' = -\tfrac{1}{2}(x^2 + a^2)^{-3/2} \cdot 2x = -\tfrac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}.$$

Пример 7. Вычислить значения первой и второй производных функции $y = (2x - 1)^3$ в точках $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

Решение. Находим первую производную: $y' = 6(2x - 1)^2$. При $x = 1$ имеем $y'(0) = 6$, а при $x = -1$ $y'(-1) = 54$.

Далее, $y'' = 24(2x - 1)$, $y''(0) = -24$, $y''(-1) = -72$.

Пример 8. Найти производную *n*-го порядка функции $y = \sin x$.

Решение. Дифференцируя последовательно n раз данную функцию, находим:

$$y' = \cos x = \sin(x + \pi/2),$$

$$y'' = \cos(x + \tfrac{\pi}{2}) = \sin(x + 2 \cdot \tfrac{\pi}{2}),$$

$$y''' = \cos\left(x + 2 \cdot \tfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3 \cdot \tfrac{\pi}{2}\right),$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)} = \cos(x + (n - 1) \cdot \tfrac{\pi}{2}) = \sin(x + n\tfrac{\pi}{2}).$$

Задания для решения

В заданиях 58-62 для данных функций найти производные указанного порядка:

58) y''', где $y = x^5 - 3x^3 + 1$;

59) $y^{(5)}$, где $y = \ln x$;

60) $t''(-1)$, где $t = \operatorname{arctg} 3x$;

61) y'', где $y = e^{-x^2}$;
62) y'', где $y = (1 + x^2)\operatorname{arctg} x$.
63) Найти значения производных любого порядка функции $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ в точке $x = -1$.
64) Дано уравнение движения точки по оси Ox: $x = 20 - -3t + 2t^3$ (x измеряется в метрах, t — в секундах). Найти скорость v и ускорение ω этой точки в моменты времени $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 5$ с.
65) Показать, что функция $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$ при любых постоянных C_1 и C_2 удовлетворяет уравнению $y'' + y' - -2y = 0$.
66) Вычислить значение второй производной функции y, заданной уравнением $e^y + xy - 2x^2 = 0$, в точке $(2, 0)$.
67) Вычислить значение второй производной функции y, заданной уравнением $2x^2 + y^3 - xy = 3$, в точке $(0, 1)$.
68) Вычислить значение второй производной функции y, заданной уравнением $x^2 + 3y^2 - 2xy + 2x = 1$, в точке $(1, -1)$.

1.4 Дифференциалы первого и высших порядков и их приложения

Определение. *Дифференциалом первого порядка* функции $y = f(x)$ называется главная часть ее приращения, линейная относительно приращения $\Delta x = dx$ независимой переменной x.

Дифференциал dy функции равен произведению ее производной и дифференциала независимой переменной:

$$dy = y'dx = f'(x)dx,$$

поэтому справедливо равенство

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

На рисунке 2 изображена дуга MN графика функции $y = f(x)$, касательная MT, проведенная к нему в точке $M(x, y)$, $AB = \Delta x = dx$, $CT = dy$, отрезок $CN = \Delta y$.

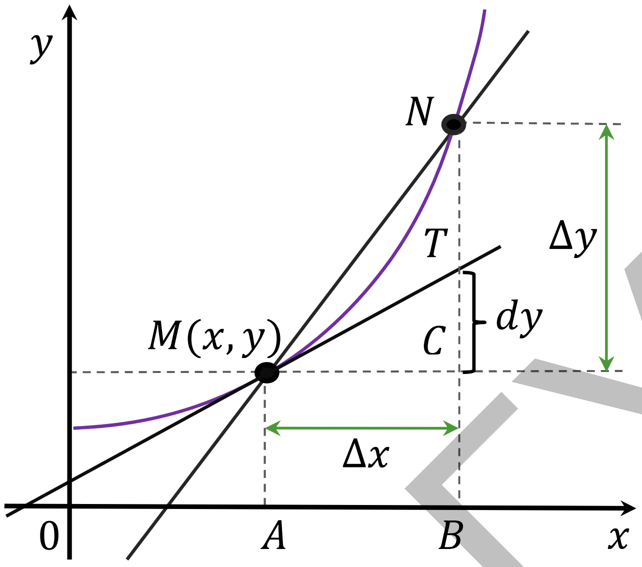

Рис. 2. Дифференциал и приращение
функции $y = f(x)$ на отрезке AB

Дифференциал функции dy отличается от ее приращения Δy на бесконечно малую более высокого порядка по сравнению с Δx.

Правила нахождения дифференциалов следуют непосредственно из определения дифференциала и правил нахождения производных.

Пример 9. Найти дифференциал функции $y = \sin^5 2x$.

Решение. Находим производную данной функции:

$$y' = 5\sin^4 2x \cdot \cos 2x \cdot 2,$$

тогда

$$dy = 10\sin^4 2x \cdot \cos 2x \, dx.$$

Определение. Дифференциалом n-го порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка этой функции, т. е.

$$d^n y = d(d^{n-1} y)\ .$$

Если дана функция $y = f(x)$, где x — независимая переменная, то

$$d^2 y = y'' dx^2, \quad d^3 y = y''' dx^3, \quad \ldots, \quad d^n y = y^{(n)} dx^n.$$

Пример 10. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \ln(1 + x^2)$.

Решение. Имеем:

$$y' = 2x/(1 + x^2),$$

$$y'' = (2(1 + x^2) - 4x^2)/(1 + x^2)^2 = 2(1 - x^2)/(1 + x^2)^2.$$

Тогда

$$d^2y = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}dx^2.$$

Пример 11. Найти приращение и дифференциал функции $y = x^2 - 3x + 2$ при $x = 5$ и $\Delta x = 0{,}1$.

Решение. Вычислим приращение функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) =$$
$$= ((x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 2) - (x^2 - 3x + 2) =$$
$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 2 - x^2 + 3x - 2 =$$
$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\Delta x = \Delta x(2x + \Delta x - 3).$$

Дифференциал функции равен

$$dy = f'(x)\Delta x = (2x - 3)\Delta x.$$

При $x = 5$ и $\Delta x = 0{,}1$ имеем $\Delta y = 0{,}71$ и $dy = 0{,}7$. Различие между Δy и dy составляет всего 0,01.

Так как $\Delta y \approx dy$, или $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)dx$, то при малом приращении Δx независимой переменной x имеет место следующая формула *для приближенного вычисления* значения функции в точке $x + \Delta x$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx.$$

Пример 12. Вычислить приращение стороны куба, если известно, что его объем увеличился от 8 до 8,01 м^3.

Решение. Если x — объем куба, то его сторона $y = \sqrt[3]{x}$. По условию задачи $x = 8$, $\Delta x = 0{,}01$. Тогда приращение стороны куба

$$\Delta y \approx dy = y'(x)\Delta x = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} \cdot 0{,}01 = \frac{0{,}01}{12} \approx 0{,}00083 \text{ м} < 1 \text{ мм}.$$

Пример 13. Найти приближенно $\operatorname{tg} 46°$.

<u>Решение.</u> Полагаем $x = \pi/4$, тогда

$$\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \approx 0{,}0175,$$

$$\operatorname{tg} 46° \approx \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} \cdot 0{,}0175 = 1 + 2 \cdot 0{,}0175 = 1{,}035.$$

Задания для решения

Найти дифференциалы первого порядка следующих функций:

69) $y = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$;

70) $y = \ln(x + x^2)$;

71) $y = x \operatorname{tg}^3 x$.

Найти дифференциал второго порядка функций:

72) $y = \frac{1}{2}\sin x^2$;

73) $y = \frac{1}{3}e^{-x^3}$.

Найти дифференциалы третьего порядка функций:

74) $y = \frac{1}{2}\cos^2 2x$;

75) $y = \frac{\ln x}{x}$.

Найти приближенные значения выражений с помощью дифференциала функции:

76) $\sqrt[4]{16{,}5}$, $\sqrt[3]{26}$;

77) $\sin 31°$, $\cos 89°$;

78) $e^{0{,}03}$, $\ln 0{,}95$.

79) Найти дифференциалы функции $y = x^3 \ln x$ до третьего порядка включительно.

80) Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $y = (x^2 + 1)\operatorname{arctg} x$.

Найти выражения приращений функций и их дифференциалов и вычислить их значения при заданных x и Δx.

81) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$, $x = 2$, $\Delta x = 0{,}01$;

82) $y = \sqrt{1 + x^2}$, $x = 0$, $\Delta x = -0{,}01$.

1.5 Правило Лопиталя-Бернулли и применение его к нахождению предела функции

При вычислении пределов функций для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ применяют следующее правило.

Правило Лопиталя-Бернулли. *Если функции* $y = f(x)$ *и* $y = \varphi(x)$ *удовлетворяют условиям теоремы Коши* (см., например, [4], с.134) *в некоторой окрестности точки* $x = x_0$, *одновременно стремятся к нулю (или* $\pm\infty$*) при* $x \to x_0$ *и существует* $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, *то существует также* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *и эти пределы равны, т. е.*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

Замечания. 1) Правило Лопиталя-Бернулли справедливо и при $x_0 = \pm\infty$. **2)** Правило Лопиталя-Бернулли можно применять несколько раз. **3)** Предел отношения самих функций может существовать, в то время как предел отношения производных этих функций не существует.

Пример 14. Найти $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} + x}{\sin 3x}$.

Решение. Имеем дело с неопределенностью $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя-Бернулли:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} + x}{\sin 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x}}{3\cos 3x} = \frac{2}{3}.$$

Неопределенность вида $0 \cdot \infty$ преобразуется в неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Неопределенность вида $\infty - \infty$ заменяется неопределенностью $0 \cdot \infty$.

Пример 15. Вычислить $\lim_{x \to \infty} x^2\, e^{-2x}$.

Решение. Неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Получим, что

$$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^{2x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{(x^2)'}{(e^{2x})'} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{2e^{2x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0.$$

Для раскрытия неопределенностей вида 0^0, 1^∞, ∞^0 применяется *метод логарифмирования*, который состоит в следующем.

Пусть $\lim_{x\to x_0}(f(x))^{\varphi(x)} = A$. Так как логарифмическая функция непрерывна, то

$$\lim_{x\to x_0} \ln y = \ln \lim_{x\to x_0} y.$$

Тогда

$$\ln A = \lim_{x\to x_0} (\varphi(x) \ln f(x))$$

и неопределенности трех указанных выше видов сводятся к неопределенности вида $0 \cdot \infty$.

Пример 16. Вычислить $\lim_{x\to 0}(e^{-2x}+1)^{3/x}$.

Решение. Имеем дело с неопределенностью 1^∞. Обозначим искомый предел через A. Тогда получим

$$\ln A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x}\ln(e^{-2x}+1)\right) = 3\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^{-2x}+1)}{x} =$$

$$= 3\lim_{x\to 0}\frac{-2e^{-2x}/(e^{-2x}+1)}{1} =$$

$$= -6\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}}{e^{-2x}+1} = -3, \qquad A = e^{-3}.$$

Задания для решения

Вычислить пределы:

83) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$;

84) $\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-3x^2+2x-1}{x^3-2x+1}$;

85) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{\mathrm{tg}3x}$;

86) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$;

87) $\lim_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2a}}$;

88) $\lim_{x\to \pi/2}(\mathrm{tg}x)^{2x-\pi}$;

89) $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)^{x}$;

90) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{x\sin 7x}$;

91) $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2}$;

92) $\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}}{x-2}$;

93) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$;

94) $\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{3}{x}\right)$;

95) $\lim_{x\to 1}x^{1/(1-x)}$.

1.6 Возрастание и убывание функции. Максимум и минимум (экстремум) функции

Одной из важнейших прикладных задач дифференциального исчисления является разработка общих приемов исследования поведения функций.

Возрастание и убывание функции $y=f(x)$ *характеризуется знаком ее производной* y'*:* если на некотором интервале $y'>0$, то функция возрастает, а если $y'<0$, то функция убывает на этом интервале.

Пример 17. Указать интервалы монотонности функции $y=\frac{x^2}{2}-\ln x$.

Решение. Область определения функции – множество действительных положительных чисел. Находим ее производную:

$$y'=x-1/x=(x^2-1)/x.$$

В области определения функции $y'=0$ при $x^2-1=0$, т. е. при $x_0=1$. Найденная точка разбивает область определения функции на интервалы (0; 1) и (1; $+\infty$) в первом из них $y'<0$, а во втором $y'>0$.

Следовательно, на интервале (0; 1) данная функция убывает, а на (1; $+\infty$) — возрастает.

Определение. *Максимумом* (*минимумом*) функции $y=f(x)$ называется такое ее значение в точке x_0, которое является наибольшим (наименьшим) по сравнению с ее значениями во всех достаточно близких точках слева и справа от x_0.

Точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю, называются *стационарными.*

Функция может иметь экстремум (максимум или минимум) только в тех точках области определения функции $D(y)$, где ее производная равна нулю или не существует. Такие точки называются *критическими.*

Пример 18. Исследовать на экстремум функцию $y = |x|$.

Решение. Для этой функции $y(0) = 0$. Но при $x \neq 0$ значения функции $y = |x| > 0$. Значит, $x = 0$ — точка минимума. Но, как было показано в примере 2, функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$.

Чтобы найти точки экстремума функции $y = f(x)$, в которых она непрерывна, можно руководствоваться **следующим правилом**:

1) Найти производную y' и критические точки, в которых $y' = 0$ или не существует, а сама функция непрерывна, и которые лежат внутри $D(y)$.

2) Определить знак y' слева и справа от каждой критической точки. Если при переходе через критическую точку x_0:

- y' меняет знак с «+» на «–» , то x_0 — точка максимума;
- y'меняет знак с «–» на «+», то x_0 — точка минимума;
- y' не меняет знака, то в точке x_0 экстремума нет.

Иногда проще исследовать критические точки, где $y' = 0$ по знаку второй производной. Т.е. вместо пункта 2) указанного выше правила можно пользоваться следующим пунктом 2′):

2′) Найти вторую производную y'' в критической точке:

- если $y''(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума;
- если $y''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимума;
- если $y''(x_0) = 0$, то вопрос о наличии экстремума в точке x_0 остается открытым.

Далее следует найти значения функции в найденных точках экстремума.

Пример 19. Найти экстремум функции $y = (1-2x)^3$.

Решение. Вычислим производную $y' = -6(1-2x)^2$. Производная $y'(1/2) = 0$. Но в этой точке экстремума нет, так как $-6(1-2x)^2 < 0$ при любом x. Следовательно, обращение в нуль производной функции не обеспечивает существования экстремума функции.

Замечание. Функция имеет экстремум не во всякой своей критической точке. Но если в какой-либо точке функция достигает экстремума, то эта точка является критической.

Пример 20. Найти экстремум функции $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

Решение. Область определения функции $D(y)$ – все действительные числа. Находим ее производную:

$$y' = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x} - 1\right).$$

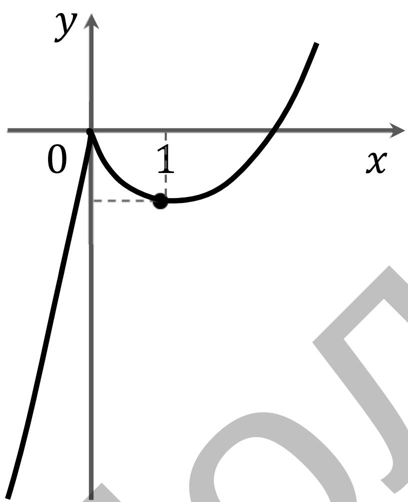

Рис. 3. График функции $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$

Критические точки: $x_1 = 0$ (y' терпит разрыв) и $x_2 = 1$ ($y' = 0$), которые разбивают область определения функции на интервалы знакопостоянства y': $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ +\infty)$. Определим знак производной в каждом интервале. Имеем: $y'(-1) = 4 > 0$, т. е. в интервале $(-\infty;\ 0)$ функция возрастает; $y'(1/8) = -2 < 0$, значит, в интервале $(0;\ 1)$ функция убывает; $y'(8) = 1 > 0$, следовательно, в интервале $(1;\ +\infty)$ функция возрастает. Значит, точка $x_1 = 0$ является точкой максимума и $y_{\max} = y(0) = 0$. Точка $x_2 = 1$ является точкой минимума и $y_{\min} = y(1) = -1$. График функции изображен на рисунке 3.

Пример 21. Исследовать на экстремум функцию $y = xe^{-x}$ с помощью второй производной.

Решение. Вычислим производные первого и второго порядка:

$$y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x},$$
$$y'' = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}.$$

Функция имеет критическую точку $x_0 = 1$. Вычисляем значение второй производной в этой точке: $y''(1) = -\frac{1}{e} < 0$, т. е. $x_0 = 1$ — точка максимума; $y_{\max} = \frac{1}{e}$.

Задания для решения

В заданиях 96-105 определить промежутки возрастания и убывания указанных функций:

96) $y = 2 + x - x^2$;
97) $y = 3x - x^3$;
98) $y = x^4 - 2x^2 - 5$;
99) $y = \frac{2x}{x^2+1}$;
100) $y = \frac{x}{x^2-6x-16}$;
101) $y = x^3 + 4x^2 - 7$;
102) $y = \frac{x^2+1}{x}$;
103) $y = \frac{2x}{\ln x}$;
104) $y = 1 + 3\sqrt[3]{x^2}$;
105) $y = \frac{\sqrt{x}}{x+2}$.
106) Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$.

В заданиях 107-116 исследовать на экстремум следующие функции:

107) $y = \sqrt[3]{(x^2-6x+5)^2}$;
108) $y = x - \ln(1+x)$;
109) $y = x\ln^2 x$;
110) $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$;
111) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$;
112) $y = x^2 e^{-x}$;
113) $y = \frac{4x}{x^2+4}$;
114) $y = x - \frac{1}{x}$;

115) $y = \sin x - x$;

116) $y = \sqrt[5]{x^4}$.

117) Требуется выделить прямоугольный участок земли площадью 150 квадратных метров, огородить его и разделить забором на две равные части. Определите размеры участка, чтобы на постройку забора ушло наименьшее количество материала.

118) Задачу 117 решите при условии, что участок нужно разделить забором на три равные части, перегораживая параллельно одной из сторон участка. Площадь участка 200 квадратных метров.

119) Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. При заданном периметре окна найти такие его размеры (высоту прямоугольника и радиус полукруга), чтобы оно пропускало максимум света.

120) Известно, что прогнозная цена акции предприятия $C(t)$ имеет вид:

$$C(t) = \frac{C_0 rt}{r_e - r + rt},$$

где C_0 — начальная цена акции, r — относительная прибыль предприятия, t — доля прибыли, выделенная на выплату дивидендов, r_e — наиболее эффективная ставка, по которой можно реинвестировать дивиденды. Пусть $r_e = 0{,}5$. Инвестор продал свою акцию при $r_1 = 0{,}1$, а купил акцию при $r_2 = 0{,}2$. При каком значении t эта операция принесет наибольшую ожидаемую прибыль, при условии, что начальная цена обеих акций равна единице?

1.7 Наибольшее и наименьшее значения функции. Интервалы выпуклости, вогнутости. Точки перегиба. Асимптоты

Наибольшим значением функции называется самое большее, а *наименьшим значением* — самое меньшее из всех ее значений.

Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ может достигать наименьшего ($y_{\text{наим}}$) или наибольшего ($y_{\text{наиб}}$) значения либо в своих критических точках, лежащих в интервале (a, b), либо на концах отрезка $[a, b]$.

Для функции $y = f(x)$ можно использовать следующее **правило для нахождения наибольшего или наименьшего значения на отрезке** $[a, b]$ (глобального экстремума):

1) найти производную $y'(x)$;
2) найти критические точки функции, принадлежащие $[a, b]$;
3) вычислить значения функции на концах отрезка и в критических точках;
4) выбрать из полученных значений наибольшее и наименьшее ее значения.

Пример 22. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 - 3x + 1$ на отрезке $[0; 2]$.

Решение. Вычислим производную данной функции $y' = 3(x^2 - 1)$. Тогда $y' = 0$ при $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Точка $x_1 = -1$ не принадлежит отрезку $[0; 2]$. Вычисляем значения функции в критической точке $x_2 = 1$ и на концах отрезка: $y(0) = 1$, $y(1) = -1$, $y(2) = 3$. Сравнивая, получаем: $y_{\text{наим}} = y(1) = -1$ и $y_{\text{наиб}} = y(2) = 3$.

Определение. График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым* на $(a; b)$, если в каждой точке этого интервала дуга графика лежит ниже касательной к графику, и *вогнутым*, если его дуга лежит выше касательной.

Определение. Точка кривой $(x_0, f(x_0))$, отделяющая выпуклую ее часть от вогнутой, называется *точкой перегиба* *кривой*. Предполагается, что в указанной точке существует касательная.

Теорема *(достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции).* *Если во всех точках интервала* $(a; b)$ *вторая производная функции* $y = f(x)$ *отрицательна (положительна), т. е.* $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$, *то кривая* $y = f(x)$ *на этом интервале выпукла (вогнута).*

Теорема *(достаточный признак точки перегиба).* *Если в* $f''(x_0) = 0$ *или* $f''(x_0)$ *не существует и при переходе через точку* $x = x_0$ *производная* $f''(x)$ *меняет знак, то эта точка кривой* $y = f(x)$ *— точка перегиба.*

Пример 23. Найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = e^{-x^2/2}$ (кривая Гаусса).

Решение. Вычислим производные первого и второго порядка:

$$y' = -xe^{-x^2/2},\ y'' = e^{-x^2/2}\,(x^2 - 1).$$

Указанные производные существуют при любых действительных x. Приравнивая y'' нулю, имеем: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. При переходе через точку $x_1 = -1$ знак второй производной меняется с «+» на «–», а при переходе через точку при $x_2 = 1$ — с «–» на «+». Значит, точки $(-1, e^{-\frac{1}{2}})$ и $(1, e^{-\frac{1}{2}})$ — точки перегиба. На интервале $(-1; 1)$ — кривая выпукла, на остальных участках из области определения — вогнута.

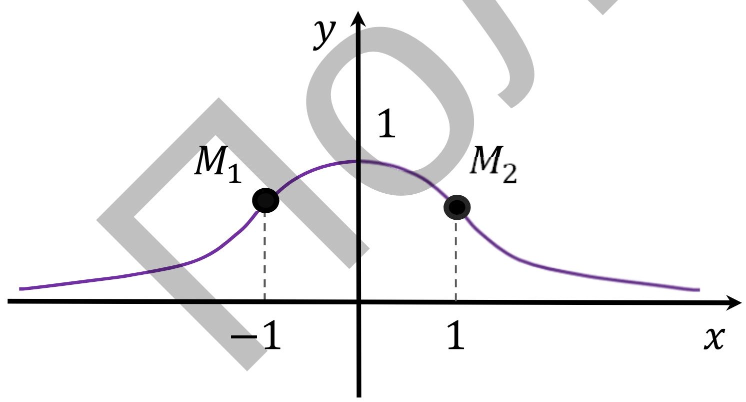

Рис. 4. Кривая Гаусса $y = e^{-x^2/2}$

Схематический график данной функции изображен на рис. 4.

Определение. Прямая линия, к которой неограниченно приближается график функции, когда точка графика неограниченно удаляется от начала координат, называется *асимптотой*.

В зависимости от поведения аргумента различают два вида асимптот: вертикальные и наклонные.

В примере 23 кривая Гаусса имеет асимптоту $y = 0$.

Определение. Если функция имеет бесконечный разрыв в точке $x = a$, т.е.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty,$$

то прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* кривой $y = f(x)$.

Определение. Если существуют пределы

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx),$$

то прямая $y = kx + b$ — называется *наклонной асимптотой* кривой $y = f(x)$ (при $k = 0$ — *горизонтальной*).

При $x \to \pm\infty$ можем прийти к двум значениям для k. Если имеем одно значение для k, то при $x \to \pm\infty$ можем получить два значения для b.

Пример 24. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^3}{x^2-4}$.

<u>Решение.</u> Уравнения двух вертикальных асимптот $x = \pm 2$, так как $\lim_{x\to\pm 2} \frac{x^3}{x^2-4} = \pm\infty$.

Для наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-4} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x^2-4} = 0,$$

т.е. получили уравнение наклонной асимптоты $y = x$ (см. рис.5).

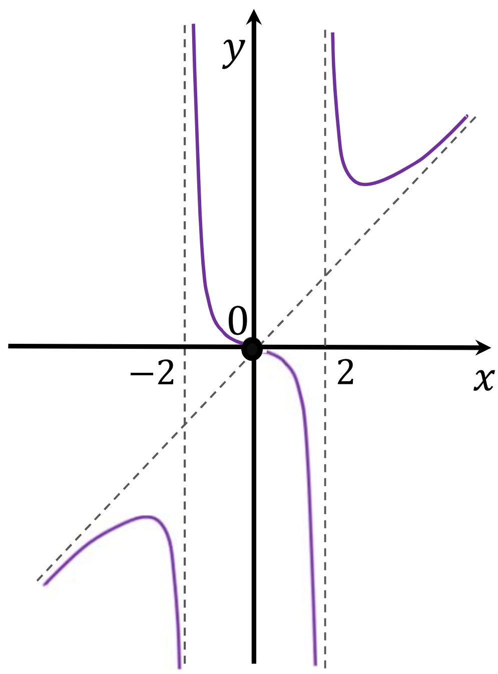

Рис. 5. График функции $y = \frac{x^3}{x^2-4}$

Задания для решения

В заданиях 121-130 вычислить наибольшее и наименьшее значения функций на указанных отрезках:

121) $y = x^4 - 8x^2 + 3$, $[-2; 2]$;
122) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, $[-1; 5]$;
123) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3$, $[-1; 2]$;
124) $y = x + 2\sqrt{x}$, $[0; 4]$;
125) $y = x^3 - 6x$, $[-3; 4]$;
126) $y = \sin 2x - x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
127) $y = \frac{x}{x - x^2 - 1}$, $[-2, 2]$;
128) $y = e^{2x} - e^{-2x}$, $[-2, 1]$;
129) $y = |x^2 - 4|$, $[-6, 8]$;
130) $y = \frac{e^x}{x}$, $[-2, 1]$.

В заданиях 131-136 найти точки перегиба, интервалы вогнутости и выпуклости графиков функций:

131) $y = 2x^3 - 3x^2 + 15$;
132) $y = 2x^2 + \ln x$;
133) $y = xe^x$;
134) $y = e^{-x^2}$;
135) $y = \ln(1 + x^2)$;
136) $y = \operatorname{arctg} x - x$.

В заданиях 137-147 найти асимптоты графиков функций:

137) $y = \frac{1+x}{2-3x}$;
138) $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$;
139) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$;
140) $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$;
141) $y = \frac{2x^5}{3+x^4}$;
142) $y = \frac{2x^3 \ln x}{1+x^2}$;
143) $y = \frac{1+x^2}{4-x^2}$;
144) $y = x^2e^{-x}$;

145) $y = \frac{x^2-2x+3}{x+2}$;
146) $y = x + 2\mathrm{arctg}\, x$;
147) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$.

1.8 Схема исследования функции и построение ее графика

Для полного исследования функции и построения ее графика можно использовать следующую схему:

1) указать область определения и область значений функции;

2) установить, обладает ли функция четностью, нечетностью, периодичностью;

3) найти точки пересечения графика функции с осями координат;

4) исследовать функцию на монотонность, указать точки экстремума;

5) определить интервалы выпуклости и вогнутости, найти точки перегиба;

6) выяснить, имеет ли функция точки разрыва, записать уравнения вертикальных и наклонных асимптот графика функции;

7) произвести необходимые дополнительные вычисления;

8) построить график функции.

Пример 25. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{(x-3)x^2}$ и построить ее график.

<u>Решение.</u> Воспользуемся рекомендуемой схемой.

1) Область определения и область значений функции — все действительные числа.

2) Функция не обладает свойствами четности, нечетности, периодичности.

3) Точки пересечения графика с осями координат: $(0,0)$ и $(3,0)$.

4) Найдем производную функции:

$$y' = \frac{x-2}{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}.$$

Тогда $y' = 0$ при $x_1 = 2$ и не существует в точках $x_2 = 0$, $x_3 = 3$. Эти точки разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; 3)$, $(3; +\infty)$. Исследуя знак производной функции, получим: функция возрастает на $(-\infty; 0)$, $(2; 3)$, $(3; +\infty)$ и убывает на $(0; 2)$. Кроме того, $x_2 = 0$ — точка максимума, $y_{\max} = 0$, $x_1 = 2$ — точка минимума, $y_{\min} = y(2) = -\sqrt[3]{4}$. В точке $x_3 = 3$ функция не имеет экстремума, так как в ее окрестности y' не меняет знака.

5) Находим вторую производную:

$$y'' = -\frac{2}{\sqrt[3]{x^4(x-3)^5}},$$

которая не равна нулю для любого x. Следовательно, возможные точки перегиба — точки, где y'' не существует, т.е. $x_2 = 0$ и $x_3 = 3$. Определяя знак y'' в каждом из интервалов, получим: на $(-\infty; 0)$ и на $(0; 3)$ кривая вогнута; на $(3; +\infty)$ кривая выпукла. Точка $x_3 = 3$ — точка перегиба.

6) Вертикальных асимптот нет, так как данная функция не имеет бесконечных разрывов. Проверим, имеет ли график наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{(x-3)x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{(x-3)x^2} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{(x-3)x^2} - x\right)\left(\sqrt[3]{(x-3)^2x^4} + x\sqrt[3]{(x-3)x^2} + x^2\right)}{\sqrt[3]{(x-3)^2x^4} + x\sqrt[3]{(x-3)x^2} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-3)x^2 - x^3}{\sqrt[3]{(x-3)^2x^4} + x\sqrt[3]{(x-3)x^2} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x^2}{\sqrt[3]{(x-3)^2x^4} + x\sqrt[3]{(x-3)x^2} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3}{\sqrt[3]{1-6/x+9/x^2}+\sqrt[3]{1-3/x}+1} = -1.$$

График имеет наклонную асимптоту $y = x - 1$.

7) Установим угол α, под которым график пересекает ось Ox в точках $x_1 = 0$ и $x_3 = 3$. В этих точках $y' = \operatorname{tg}\alpha = \infty$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Так как в точке $x_1 = 0$ функция достигает минимума, то ее график расположен не ниже оси Ox в окрестности этой точки. Точка $x_1 = 0$ называется *точкой возврата* графика функции.

8) График функции построен на рисунке 6.

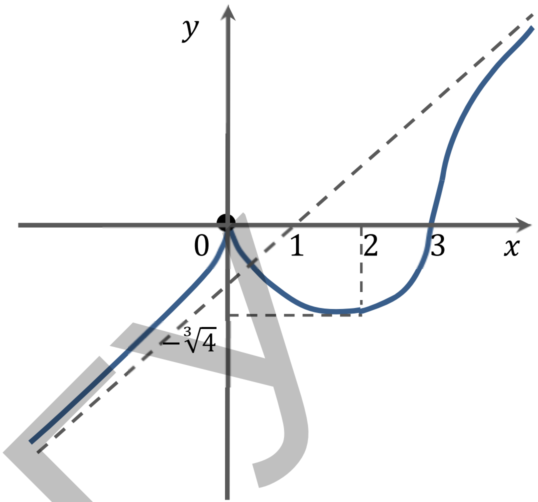

Рис. 6. График функции $y = \sqrt[3]{(x-3)x^2}$

Задания для решения

Провести полное исследование указанных функций и построить их графики:

148) $y = x^3 - 3x^2$;

149) $y = x^2 + \frac{2}{x}$;

150) $y = x^3/(3 - x^2)$;

151) $y = \ln(x^2 + 2x + 2)$;

152) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$;

153) $y = -\ln(x^2 - 4x + 5)$;

154) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$;

155) $y = \frac{x}{\ln x}$.

ГЛАВА 2 ДИФФЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

2.1 Частные производные и частные дифференциалы первого порядка функций многих переменных

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$.

Определение. Придадим переменной x некоторое приращение Δx, а y оставим постоянной, тогда функция $z = f(x, y)$ получит приращение $\Delta_x z$, называемое *частным приращением функции* z *по переменной* x*:*

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Аналогично, если переменная y получает приращение Δy, а x остается постоянной, то частное приращение функции z по переменной y:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Определение. Если существуют пределы:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x, y),$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x, y),$$

то они называются *частными производными* функции $z = f(x, y)$ по переменным x и y соответственно.

Аналогично определяются частные производные функций любого числа независимых переменных.

Так как частная производная по любой переменной является производной по этой переменной, найденной при условии, что остальные переменные — постоянны, то все правила и формулы дифференцирования функций одной переменной применимы для нахождения частных производных функций любого числа переменных.

Пример 26. Найти частные производные функции $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Решение. Находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Пример 27. Найти частные производные функции $w = \ln^2(x^2+y^3+z)$.

Решение. Находим:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2\ln(x^2+y^3+z)\cdot\frac{1}{x^2+y^3+z}\cdot 2x,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2\ln(x^2+y^3+z)\cdot\frac{1}{x^2+y^3+z}\cdot 3\,y^2,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 2\ln(x^2+y^3+z)\cdot\frac{1}{x^2+y^3+z}.$$

Определение. Дифференциал функции $z = f(x,y)$, найденный при условии, что одна из независимых переменных изменяется, а вторая остается постоянной, называется *частным дифференциалом*, т. е. по определению

$$d_x z = f'_x(x,y)dx, \quad d_y z = f'_y(x,y)dy,$$

где $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ — произвольные приращения независимых переменных, называемые их дифференциалами. Это справедливо и для функции любого числа независимых переменных.

Пример 28. Найти частные дифференциалы функции

$$w = (xy^2)^{z^2}.$$

Решение. Заметим, что производная по переменной x, а также по переменной y от указанной функции берется как от степенной функции, а производная по переменной z — как от показательной. Имеем:

$$d_x w = z^2(xy^2)^{z^2-1}y^2dx,$$

$$d_y w = z^2 (xy^2)^{z^2-1} 2xydy,$$

$$d_z w = (xy^2)^{z^2} \ln(xy^2) 2zdz.$$

Пример 29. Вычислить значения частных производных функции $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^3} - xy^2 z$ в точке $(2, -2, 1)$.

Решение. Находим частные производные:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^3}} - y^2 z,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^3}} - 2xyz,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{3z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^3}} - xy^2.$$

В полученные выражения подставляем координаты данной точки:

$$\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{(2,-2,1)} = \frac{2}{3} - 4 = -3\frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{(2,-2,1)} = -\frac{2}{3} + 8 = 7\frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{(2,-2,1)} = 1 - 8 = -7.$$

Задания для решения

В заданиях 156-166 найти частные производные указанных функций:

156) $z = x^5 + 3x^4 - 6y^3$;

157) $z = (x^4 + xy^2)^3$;

158) $z = \arcsin\frac{y}{x}$;

159) $z = x\sqrt{y} + y/\sqrt{x}$;

160) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$;

161) $z = \ln(xy + \ln xy)$;

162) $u = \mathrm{arctg}\,(xy/z)$;

163) $u = \ln\sqrt{(x^2+y^2)/(x^2+z^2)}$;
164) $u = \arcsin\sqrt{xy^2z^3}$;
165) $u = \mathrm{tg}^2(x - y^2 + 2^3)$;
166) $u = (xy)^{z^2}$.
167) Вычислить $u'_x + u'_y + u'_z$ в точке $(1,1,1)$, если $u = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$.
168) Вычислить значения частных производных функции $z = x + y + \sqrt{x^2+y^2}$. В точке $(3,4)$.

В заданиях 169-178 найти частные дифференциалы функций:

169) $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$;
170) $z = \mathrm{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$;
171) $u = x^{yz}$;
172) $u = \frac{x^2+y^2-z^2}{z^2-x^2-y^2}$;
173) $z = \ln(4 - x^2 + y^2)$;
174) $z = \sqrt{4 - x^2 + y}$;
175) $z = \sqrt{xy} + \sqrt{x-y}$;
176) $u = \ln\frac{xyz}{x^3+y^3+z^3}$;
177) $z = \sqrt{(x^2+y^2)/(x^2-y^2)}$;
178) $z = \sqrt[3]{(x^2-y^3)^2}$.

2.2 Полный дифференциал. Приближенное вычисление с помощью полного дифференциала

Определение. *Полным приращением* функции $z = f(x,y)$ называется разность

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Определение. Главная часть полного приращения функции $z = f(x,y)$, линейно зависящая от приращений независимых переменных Δx и Δy, называется *полным дифференциалом* функции и обозначается dz. Если функция имеет непрерывные частные производные, то полный дифференциал существует и равен

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \qquad (2)$$

где $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ – произвольные приращения независимых переменных, называемые их дифференциалами.

Для функции n переменных $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ полный дифференциал определяется выражением:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n. \qquad (3)$$

Пример 30. Найти полное приращение и полный дифференциал функции $z = x^2 - xy$.

<u>Решение.</u> По определению

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y) - x^2 + xy =$$
$$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - xy - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x\Delta y - x^2 + xy =$$
$$= 2x\Delta x + \Delta x^2 - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x\Delta y =$$
$$= (2x - y)\Delta x - x\Delta y + \Delta x^2 - \Delta x\Delta y.$$

Выражение $(2x - y)\Delta x - x\Delta y$, линейное относительно Δx и Δy, есть дифференциал dz, а величина $\alpha = \Delta x^2 - \Delta x\Delta y$ — бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Таким образом, $\Delta z = dz + \alpha$.

Пример 31. Найти полный дифференциал функции $u = \ln^2(x^2 + yz^2)$.

<u>Решение.</u> Вначале находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\ln(x^2 + yz^2) \cdot \frac{1}{x^2 + yz^2} \cdot 2x,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2\ln(x^2 + yz^2) \cdot \frac{1}{x^2 + yz^2} \cdot z^2,$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2\ln(x^2 + yz^2) \cdot \frac{1}{x^2 + yz^2} \cdot 2yz.$$

Следовательно, полный дифференциал функции равен:

$$du = \frac{2\ln(x^2 + yz^2)}{x^2 + yz^2} \cdot (2xdx + z^2dy + 2yzdz).$$

Полный дифференциал часто используется для приближенных вычислений значений функции, так как $\Delta z \approx dz$ при достаточно малых приращениях независимых переменных, т.е.

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + dz(x_0, y_0).$$

Пример 32. Вычислить приближенно $(1{,}02)^{3{,}99}$.

<u>Решение.</u> Рассмотрим функцию $z(x, y) = x^y$. При $x_0 = 1$ и $y_0 = 4$ имеем $z_0 = 1^4 = 1$, $\Delta x = 1{,}02 - 1 = 0{,}02$, $\Delta y = 3{,}99 - 4 = -0{,}01$. Находим полный дифференциал функции $z = x^y$ в любой точке: $dz = y\, x^{y-1}\Delta x + x^y \ln x\, \Delta y$.

Вычисляем его значение в точке с координатами (1,4) при данных приращения $\Delta x = 0{,}02$ и $\Delta y = -0{,}01$:

$$dz = 4 \cdot 1^3 \cdot 0{,}02 + 1^4 \cdot \ln 1 \cdot (-0{,}01) = 0{,}08.$$

Тогда $z = (1{,}02)^{3{,}99} \approx z_0 + dz = 1 + 0{,}08 = 1{,}08$.

Задания для решения

Найти полные дифференциалы следующих функций:

179) $z = x^3 + xy^2 + x^2y$;
180) $z = e^{x^3 - y^3}$;
181) $z = 3x^3y^2$;
182) $w = 3x^{yz}$;
183) $\mathrm{u} = \sin(\mathrm{xy^2z^3})$;
184) $z = x^y$ при $x = 2$, $y = -3$;
185) $z = \mathrm{arctg}\frac{x}{y}$ при $x = 1$, $y = 3$, $dx = 0{,}01$, $y = -0{,}03$.

Вычислить значения выражений приближенно:

186) $1{,}98^{3{,}03}$;
187) $2^{3{,}98}\mathrm{tg}\, 44°$;
188) $1{,}99^2 e^{0{,}03}$;
189) $(1{,}02)^3(0{,}97)^2$;
190) $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$.

2.3 Частные производные второго и более высокого порядка функций многих переменных

Определение. *Частными производными второго порядка* функции $\boldsymbol{y = f(x, y)}$ называют частные производные, взятые от частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xx}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yx}(x, y).$$

Аналогично определяются частные производные третьего и более высоких порядков. Запись $\frac{\partial^n z}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ означает, что функция z продифференцирована k раз по переменной x и $(n-k)$ раз по переменной y.

Частные производные $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ называются *смешанными.* Значения смешанных производных равны в тех точках, в которых эти производные непрерывны.

Пример 33. Найти частные производные второго порядка функции $z = e^{x^2 y}$.

<u>Решение.</u> Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2 y} \cdot 2xy, \ \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2 y} \cdot x^2.$$

Продифференцировав их еще раз, получим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x^2 y} \cdot 4x^2 y^2 + e^{x^2 y} \cdot 2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x^2 y} \cdot x^4 + e^{x^2 y} \cdot 0 = x^4 e^{x^2 y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{x^2 y} \cdot 2x^3 y + e^{x^2 y} \cdot 2x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^{x^2 y} \cdot 2x^3 y + e^{x^2 y} \cdot 2x.$$

Сравнивая последние два выражения, видим, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Определение. *Полный дифференциал второго порядка* $\mathrm{d}^2\mathrm{z}$ функции $z = f(x, y)$ выражается формулой

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Пример 34. Найти полный дифференциал второго порядка функции $z = x^3 + y^2 + xy^2$.

Решение. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + y^2, \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 2xy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 + 2x, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y.$$

Следовательно,

$$d^2 z = 6xdx^2 + 4ydxdy + 2(x+1)dy^2.$$

Если поверхность задана функцией $z = f(x, y)$, то *уравнение касательной плоскости* в точке (x_0, y_0, z_0) к данной поверхности имеет вид:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \qquad (4)$$

а *каноническое уравнение нормали*, проведенной через точку (x_0, y_0, z_0) поверхности:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \qquad (5)$$

В случае, когда уравнение гладкой поверхности задано неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, и $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке (x_0, y_0, z_0) имеет вид

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) +$$
$$+ F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0, \qquad (6)$$

а уравнение нормали —

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}. \qquad (7)$$

Пример 35. Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3+y^3+z^3+z-7=0$ в точке $(1,2,-1)$.

Решение. Вычислим значения частных производных в точке $(1,2,-1)$:

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)=3x^2|_{(1,2,-1)}=3,$$

$$F'_y(x_0,y_0,z_0)=3y^2|_{(1,2,-1)}=12,$$

$$F'_z(x_0,y_0,z_0)=(3z^2+1)|_{(1,2,-1)}=4.$$

Подставляя их в уравнения (6) и (7), получаем, соответственно, уравнение касательной плоскости

$$3(x-1)+12(y-2)+4(z+1)=0$$

и каноническое уравнение нормали

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{12}=\frac{z+1}{4}.$$

Задания для решения

В заданиях 191-198 найти частные производные второго порядка указанных функций и проверить, равны ли их смешанные частные производные:

191) $z=x^3+2xy^2$;

192) $z=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$;

193) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$;

194) $z=e^x(\sin y+\cos x)$;

195) $z=(x+y)/(x-y)$;

196) $z=e^{xy^2}$;

197) $z=\ln(x^2+y^2)$;

198) $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

199) Показать, что функция $z=e^x(x\cos y-y\sin y)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

200) Доказать, что функция $z = e^{-\cos(x+3y)}$ удовлетворяет уравнению $9 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

В заданиях 201-205 записать уравнения касательной плоскости и нормали к указанным поверхностям в соответствующих точках:

201) $xy^2 + 2y^2 + 3yz + 4 = 0$ в точке $(0, 2, -2)$;

202) $z = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ в точке $(3, 1, 4)$;

203) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ в точке $(1, -1, 1)$;

204) $z = 1 + x^2 + y^2$ в точке $(1, 1, -1)$;

205) $x^2 z - xyz + y^2 - x - 11 = 0$ в точке $(-2, 3, 0)$.

206) Для эллипсоида $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ записать уравнение касательной плоскости, параллельной плоскости $x - y +$ $+ 2z = 0$.

2.4 Экстремум функции многих переменных

Определение. Точка (x_0, y_0) называется *точкой локального максимума (минимума) функции* $z = f(x, y)$, если для всех точек (x, y), отличных от (x_0, y_0) и принадлежащих достаточно малой ее окрестности, выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad (f(x_0, y_0) \leq f(x, y)).$$

Максимум или минимум функции называется ее *экстремумом.*

Теорема 1 ***(необходимые условия экстремума).*** *Если точка* (x_0, y_0) *является точкой экстремума функции* $z = f(x, y)$, *то* $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ *или хотя бы одна из этих производных не существует.*

Точки, для которых эти условия выполнены, называются *критическими.*

Обозначим $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C =$ $= f''_{yy}(x_0, y_0)$, $\Delta = AC - B^2$.

Теорема 2 ***(достаточные условия экстремума).*** *Пусть функция* $z = f(x, y)$ *имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно в* *некоторой области, содержащей критическую точку* (x_0, y_0). *Тогда:*

1) если $\Delta > 0$ *и* $A < 0$ $(A > 0)$, *то точка* (x_0, y_0) *является точкой максимума (минимума) для данной функции;*

2) если $\Delta < 0$, *то в точке* (x_0, y_0) *экстремума нет;*

3) если $\Delta = 0$, *то вопрос экстремума остается открытым (нужны дополнительные исследования).*

Пример 36. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + 1{,}5y^2 - 3xy$.

Решение. Так как в данном случае $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ всегда существуют, то для нахождения критических точек получим систему уравнений (см. теорему 1):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y - 3x = 0. \end{cases}$$

Эта система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y - x = 0, \end{cases}$$

откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$. Таким образом, получили две стационарные точки: $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

Находим:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -3, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 3.$$

Тогда $\Delta = AC - B^2 = 18x - 9$.

В точке $(0, 0)$ величина $\Delta = -9 < 0$, следовательно, в этой точке экстремума нет. В точке $(1, 1)$ величина $\Delta = 9 > 0$, $A = 6 > 0$, значит, в этой точке данная функция достигает локального минимума: $z_{\min} = -0{,}5$.

Задания для решения

Исследовать на экстремум следующие функции:

207) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$;

208) $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$;

209) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$;
210) $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$;
211) $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$;
212) $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$;
213) $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$;
214) $z = 6(x - y) - x^2 - y^2$;
215) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$;
216) $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10$;
217) $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1$;
218) $z = x^3 + y^3 - 3xy$;
219) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$;
220) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$;
221) $z = xy(6 - x - y)$;
222) $z = (x - 1)^2 + 2y^2$;
223) $z = xy - 3x^2 - 2y^2$;
224) $z = x^2 + 3(y + 2)^2$.

2.5 Условный экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функции в ограниченной замкнутой области

Определение. Экстремум функции $z = f(x, y)$, найденный при условии $\varphi(x, y) = 0$, называется *условным*. Уравнение $\varphi(x, y) = 0$ называется *уравнением связи.*

Геометрически задача отыскания условного экстремума сводится к нахождению экстремальных точек кривой, по которой поверхность $z = f(x, y)$ пересекается с цилиндром $\varphi(x, y) = 0$.

Если из уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$ выразить $y = y(x)$ и подставить в функцию $z = f(x, y)$, то задача отыскания условного экстремума сводится к нахождению экстремума функции одной переменной $z = f(x, y(x))$.

Пример 37. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что $y = 2x + 1$.

Решение. Подставив $y = 2x + 1$ в функцию вместо y, получим функцию одной переменной x:

$$z = x^2 + (2x + 1)^2, z = 5x^2 + 4x + 1.$$

Находим $z' = 10x + 4$; $z' = 0$, откуда $x = -0{,}4$.

Так как $z'' = 10 > 0$, то в точке $(-0{,}4;\ 0{,}2)$ данная функция достигает условного минимума: $z_{\min} = 0{,}2$.

Дифференцируемая функция в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$ достигает своего *наибольшего (наименьшего) значения* либо в критической точке, лежащей внутри области $\overline{D}$, либо на границе этой области.

Для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области $\overline{D}$ необходимо:

1) найти все критические точки, лежащие внутри данной области и на ее границе,

2) вычислить значения функции в критических точках, а также во всех критических точках границы,

3) сравнить полученные числа, выбрать наибольшее $y_{\text{наиб}}$ и наименьшее $y_{\text{наим}}$ из них.

Пример 38. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2y^2 - xy - x - 3y$ в области, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$.

Решение. Область определения функции представляет собой треугольник OBC, изображенный на рисунке 7.

Найдем стационарные точки функции из следующей системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 1 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4y - x - 3 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем стационарную точку $A(1{,}1)$, принадлежащую треугольнику OBC, в которой значение функции $z(A) = z(1{,}1) = -2$.

Исследуем данную функцию на границе области, т.е. на отрезках OB, OC, BC (см. рис. 7).

Отрезок OB. Здесь $x = 0$, а функция примет вид: $z = 2y^2 - 3y$. Найдем стационарную точку: $z'_y = 4y - 3 = 0$ при $y = 0{,}75 \in OB$. Значение функции в этой точке: $z(D) = z(0; 0{,}75) = -9/8$. На концах отрезка OB: $z(O) = z(0{,}0) = 0$, $z(B) = z(0{,}3) = 9$.

Отрезок OC. Здесь $y = 0$, а функция примет вид: $z = x^2 - x$. Получаем: $z'_x = 2x - 1 = 0$ при $x = 0{,}5$ — точка E, $E \in OC$. Значения функции в точках E и C: $z(E) = z(0{,}5; 0) = -1/4$, $z(C) = z(3{,}0) = 6$.

Отрезок BC. Здесь $y = 3 - x$, получаем функцию одной переменной: $z = 4x^2 - 13x + 9$. Далее $z'_x = 8x - 13 = 0$ при $x = \frac{13}{8}$. Значение функции $z(F) = z\left(\frac{13}{8}; \frac{11}{8}\right) = -\frac{25}{16}$. Заметим, что на концах отрезка BC значения функции уже найдены.

Сравним значения:

$z(A) = z(1{,}1) = -2$,

$z(B) = z(0{,}3) = 9$,

$z(C) = z(3{,}0) = 6$,

$z(D) = z(0; 0{,}75) = -\frac{9}{8}$,

$z(E) = z(0{,}5; 0) = -1/4$,

$z(F) = z\left(\frac{13}{8}; \frac{11}{8}\right) = -\frac{25}{16}$,

$z(O) = z(0{,}0) = 0$.

Имеем: $z_{\text{наиб}} = 9$, $z_{\text{наим}} = -2$.

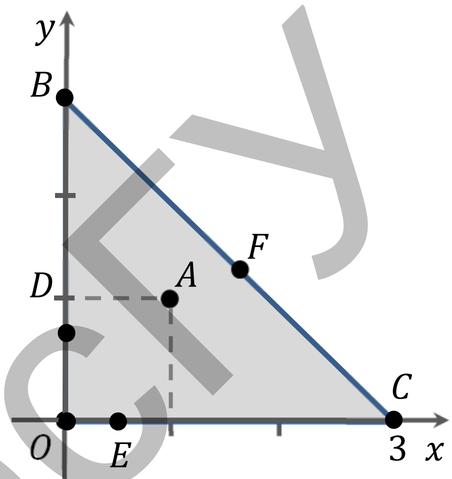

Рис. 7. Критические точки функции $z = x^2 + 2y^2 - xy - x - 3y$ в области, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$

Пример 39. Определить размеры прямоугольного параллелепипеда наибольшего объема, полная поверхность которого имеет данную площадь S [14].

Решение. Объем прямоугольного параллелепипеда $V = xyz$, где x, y, z — измерения параллелепипеда, а площадь его поверхности $S = 2(xy + xz + yz)$, откуда

$$z = \frac{S - 2xy}{2(x + y)}, V = \frac{Sxy - 2x^2y^2}{2(x + y)} = V(x, y).$$

Найдем экстремум функции $V = V(x, y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{y^2(S - 2x^2 - 4xy)}{2(x + y)^2} = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{x^2(S - 2y^2 - 4xy)}{2(x + y)^2} = 0. \end{cases}$$

Так как $x > 0$, $y > 0$, то из последней системы следует, что $x = y = \sqrt{S/6}$. Получили единственную стационарную точку $\left(\sqrt{S/6}, \sqrt{S/6}\right)$, которая является и точкой максимума функции $V = V(x, y)$, поэтому проверять выполнение достаточных условий максимума нет необходимости. Находим

$$z = \frac{S - S/3}{4\sqrt{S/6}} = \frac{2S/3}{4\sqrt{S/6}} = \sqrt{S/6}.$$

Значит, наибольший объем имеет куб с ребром $\sqrt{S/6}$.

Задания для решения

В заданиях 225-233 исследовать функции на экстремум:

225) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;

226) $z = 3xy - x^2 - y^2 - 10x + 5y$;

227) $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$;

228) $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$;

229) $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$;

230) $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$;

231) $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$;

232) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$;

233) $z = 6(x - y) - x^2 - y^2$.

234) Найти экстремумы функции $z = x + 2y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$.

235) Определить размеры прямоугольного параллелепипеда данного объема V, имеющего поверхность наименьшей площади.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в области $\overline{D}$, ограниченной заданными линиями.

236) $z = 3x + y - xy$, $\overline{D}$: $y = x$, $y = 4$, $x = 0$;

237) $z = xy - x - 2y$, $\overline{D}$: $x = 3$, $y = x$, $y = 0$;

238) $z = 5x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $\overline{D}$: $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$;

239) $z = 5x^2 - 3xy + y^2$, $\overline{D}$: $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$;

240) $z = x^2 + 2xy - y^2$, $\overline{D}$: $x - y + 1 = 0$, $x = 3$, $y = 0$;

241) $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$, $\overline{D}$: $x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$;

242) $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$, $\overline{D}$: $x = 0$, $x = 1, y = 0, y = 6$.

ГЛАВА 3 ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ

3.1 Применение надстройки *Microsoft Mathematics* в вычислении производной функции

С помощью надстройки *Microsoft Mathematics* для *Word* и *OneNote* возможно, в том числе, вычисление производной функции. Эта надстройка также содержит расширенный набор математических символов и структур для точного отображения формата математических выражений.

Чтобы вычислить производную, можно:

1. Ввести выражение, которое требуется продифференцировать. Это можно сделать несколькими способами. Например, на вкладке *Математика* из списка *Уравнение* выбрать пункт *Вставить новую формулу* или нажать клавиши <***Alt*****=**> или <***Alt*****+**>, чтобы вставить новый математический блок.

2. На вкладке *Математика* в списке *Расчет* выбрать пункт *Дифференцировать (Дифференцировать по …).*

Результат появится в следующей строке (см. рис. 8).

Скачать бесплатную надстройку можно по адресу http://www.microsoft.com/downloads/ru-ru.

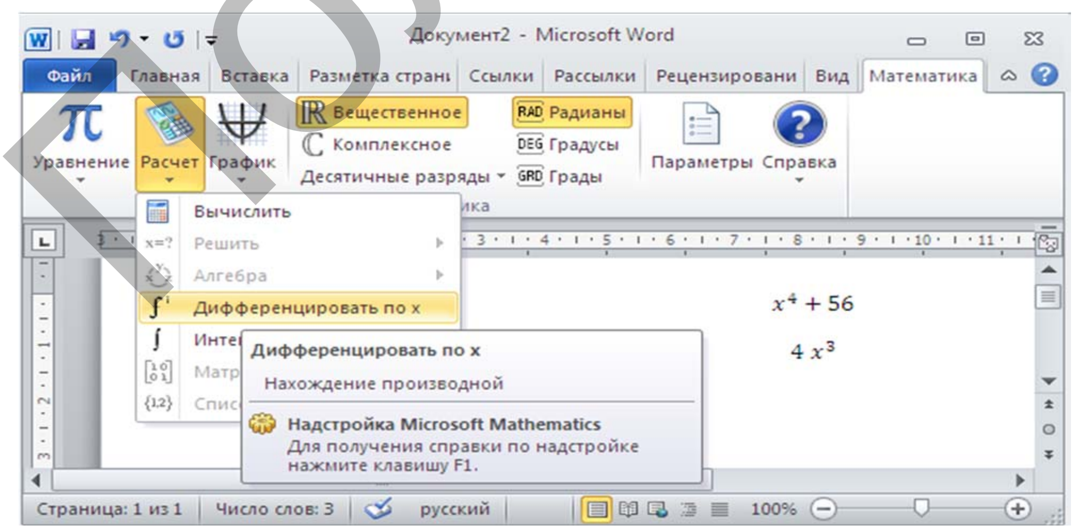

Рис. 8. Дифференцирование функции с помощью надстройки *Microsoft Mathematics*

3.2 Вычисление производной онлайн

Многие онлайн сервисы предоставляют возможность вычислять производную функции с получением подробного решения. Каждый из онлайн калькуляторов может иметь свои особенности использования, в том числе способы ввода математических функций.

Приведем расположение некоторых онлайн калькуляторов:

http://mathserfer.com/math/task.php?tname=diff,

http://planetcalc.ru/675,

http://www.mathforyou.net/Derivative.html,

http://matematikam.ru/calculate-online/differentiation.php.

Рассмотрим применение сервиса *Math Serfer* на следующем примере.

Пример 40. Найти производную функции $y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$.

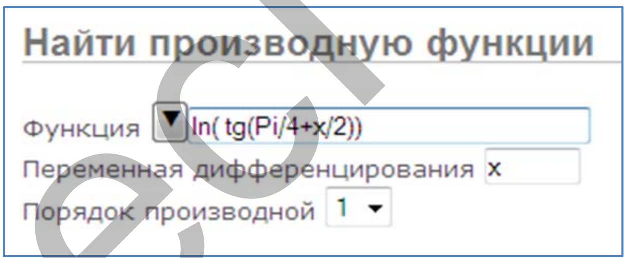

Рис. 9. Ввод условий дифференцирования функции $y = \ln \operatorname{tg}(\pi/4 + x/2)$ в сервисе *Math Serfer*

<u>Решение.</u> Для нахождения производной функции введем правую часть указанной функции, согласно правил ввода данных для этого сервиса (см. рис. 9). Далее укажем переменную дифференцирования x и порядок производной.

Результат дифференцирования смотрите на рисунке 10.

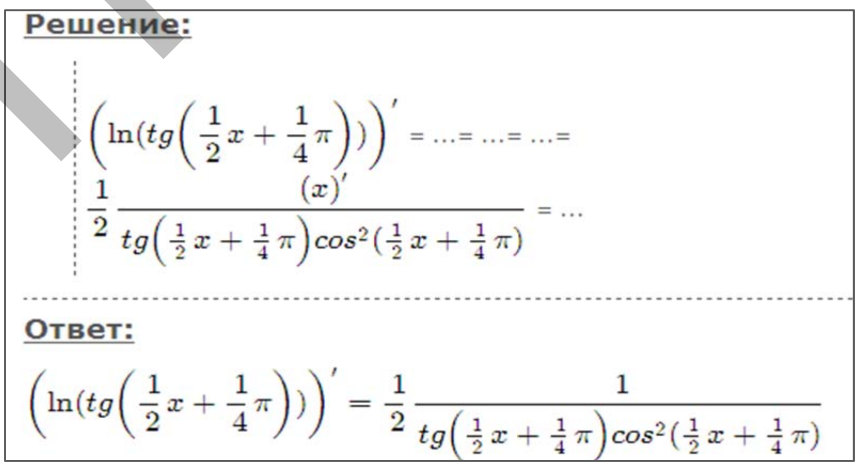

Рис. 10. Результат дифференцирования функции $\boldsymbol{y = \ln \operatorname{tg}(\pi/4 + x/2)}$ в сервисе *Math Serfer*

3.3 Применение *Maple V* при вычислении производной функции

Для вычисления производных с помощью *Maple V* может быть использована одна из следующих функций (команд): $diff(f,x)$, $Diff(f,x)$, $D(f)$, $implicitdiff()$.

Функция $\boldsymbol{diff(f,x)}$ относится к функциям прямого исполнения.

Пример 41. Найти $(x^8 + 16x)'_x$.

Решение. Введем команду

$$> \ diff(x\hat{\ }8 + 16 * x, x),$$

при этом получим ответ $8x^7 + 16$.

Функция $\boldsymbol{Diff(f,x)}$ является функцией отложенного исполнения. Действие $Diff()$ эквивалентно аналитической записи производной в виде $\frac{d}{dx}f(x)$. Для вычисления функции $Diff()$ применяется команда $value(\%)$, где символ % обозначает предыдущую строку.

Пример 42. Найти $(x^8 + 16x)'_x$.

Решение. Запишем команду

$$> \ Diff(x\hat{\ }8 + 16 * x, x);$$

при этом результатом будет выражение $\frac{d}{dx}(x^8 + 16x)$.

Затем введем команду

$$> \ value(\%).$$

Результат — $8x^7 + 16$.

Для *вычисления производных более высокого порядка* следует указать в параметрах $x\$n$, где n – порядок производной.

Команда $\boldsymbol{D(f)}$ также используется для вычисления производной. В отличие от функции $diff()$, команда $D()$ не требует второго аргумента и при дифференцировании, например, выражения x^3, рассматривает x не как независимый аргумент, а как некоторую функцию.

Пример 43. Вычислить производные функций:

1) $f(x) = (\sin 2x)^3 - (\cos 2x)^3$; 2) $y = x^3$; 3) $z = tg + cos$.

Решение. При записи следующих выражений будем получать соответствующие результаты:

1) $> \ f := x -> (sin(2 * x))^\wedge 3 - (cos(2 * x))^\wedge 3;$

$> \ D(f);$

$x \to 6\sin(2x)^2\cos(2x) + 6\cos(2x)^2\sin(2x).$

2) $> \ D(x^3);$

$3\,D(x)x^2$

3) $> D(tan + cos);$

$1 + tan^2 - sin.$

Замечание. Как показывает последний пример, иногда удается получить результат операции дифференцирования без использования аргумента дифференцируемой функции.

Функция $\boldsymbol{implicitdiff}$() используется для нахождения *производной неявной функции*. В скобках в качестве первого параметра записывается левая часть уравнения неявно заданной функции $F(x, y) = 0$, второй параметр — переменная, производную которой нужно найти, а третий — аргумент, по которому ведется дифференцирование.

Пример 44. Вычислить производную функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $876x^{45} + 67xy + y^{25}$.

Решение. Запишем команду

$> \ implicitdiff(876 * x^\wedge 45 + 67 * x * y + y^\wedge 25, y, x);$

В результате получим ответ: $-\frac{39420x^{44}+67y}{67x+25y^{24}}$.

Пример 45. Вычислить производные функций:

1) $y = \sqrt{34x^7 + 56}$; 2) $y = x^3 + tx + t$ по переменной x; 3) $y = x^3 + t \cdot x + t$ по переменной t.

Решение. При записи указанных выражений получим следующие результаты:

$> \ diff(sqrt(34 * x^\wedge 7 + 56, x));$

$\frac{119x^6}{\sqrt{34x^7+56}}.$

$> \ diff(x^\wedge 3 + t * x + t, x);$

$3x^2 + t.$

$> \ diff(x^\wedge 3 + t * x + t,);$

$x + 1.$

Пример 46. Вычислить вторую производную следующих функций: $y = z\sin 2z$; $y = e^{x^2}\sin\frac{1}{x}$.

Решение. Для первой функции рассмотрим два способа:

$> \ diff(diff(z * sin(2 * z), z), z);$

или

$> \ diff(z \cdot sin(2 * z), z, z);$

Ответ: $4\cos(2z) - 4z\sin(2z)$.

Для второй имеем:

$> \ Diff(exp(x\hat{}2) * sin(1/x), x, x);$

$\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{(x^2)}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right);$

$> \ value(\%);$

$2e^{(x^2)}\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 4x^2e^{(x^2)}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{4e^{(x^2)}\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} - \frac{e^{(x^2)}\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^4} + \frac{2e^{(x^2)}\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3}.$

Очень часто результат дифференцирования может выглядеть громоздким, поэтому его приходится упрощать. В этом случае можно применить команду $simplify()$. В качестве ее аргумента вводится выражение, которое следует упростить. Возможно использование аналогичной команды $combine()$, вторым параметром которой указывается опция $trig$. Это инструкция для вычислительного ядра *Maple* использовать встроенные алгоритмы преобразования тригонометрических выражений: в частности, произведения тригонометрических функций заменяются, по возможности, тригонометрическими функциями от суммы (разности) аргументов.

Замечания.

1) Доступ к справочной информации о процедуре $combine()$, как и о прочих процедурах и командах, можно получить, разместив в рабочем листе курсор на вызове этой процедуры и нажав <**F1**>.

2) Операция возведения в степень (^ или $**$) является бинарной. Это значит, что запись вида a^b^c некорректна. Для выражения a^{b^c} использовать скобки: a^(b^c).

3) Вычислительное ядро *Maple* достаточно эффективно работает не только с непрерывными функциями, но и с такими, которые имеют точки (или области) разрывов.

Пример 47. Вычислить $\frac{d^{24}}{dx^{24}}(e^x(x^2-1))$.

Решение. Запишем команду:

$> \ Diff(exp(x)*(x^\wedge 2-1), x\$24);$

$$\frac{d^{24}}{dx^{24}}\left(e^x(x^2-1)\right).$$

$> diff(exp(x)*(x^\wedge 2-1), x\$24);$

$$e^x(x^2-1)+48e^x x+552e^x.$$

$> \ collect(\%, exp(x));$

$$e^x(x^2+551+48x).$$

Следующий пример показывает применение *Maple* к вычислению производной функции в указанных точках.

Пример 48. Вычислить вторую производную функции $y = 34 + x^4 + 45x^6$ в точках $x = 1$, $x = 0{,}5$.

Решение. Запишем команду:

$> \ y := 34 + x^\wedge 4 + 45 * x^\wedge 6;$

$$34 + x^4 + 45 * x^6$$

$> d2 := diff(y, x\$2);$

$$12x^2 + 1350x^4$$

$> x := 1; d2(x) = d2;$

$$d2(1) = 1362$$

$> x := 0.5; d2(x) = d2;$

$$d2(0.5) = 87.3750.$$

3.4 Применение пакета *Mathematica* при дифференцировании функции

Вычисление производных функций с помощью пакета *Mathematica* можно производить как в аналитической, так и в символьной форме. В таблице 1 перечислены основные команды для вычисления производных и дифференциалов функции одной и многих переменных:

Таблица 1

Функции для вычисления производных и дифференциалов в пакете *Mathematica*

Функция	Результат
$D[f,x]$	Производная или частная производная функции f по переменной x
$D[f,\{x,n\}]$	Производная или частная производная n-го порядка f по x
$D[f,x_1,x_2,\ldots]$	Смешанная производная функции f по переменным $x_1,x_2,\ldots$
$Dt[f]$	Полный дифференциал функции f
$Derivative[n_1,n_2,\ldots]\,[f]$	Производная функции, полученная в результате n_1-кратного дифференцирования функции f по первому аргументу, n_2-кратного — по второму аргументу и т. д.

Замечание. Обозначение In (ввод) используется для входной ячейки, а Out (вывод) – для ячейки, содержащей результат вычисления. Вычисление входной ячейки запускается сочетанием клавиш: **<Shift>+<Enter>**.

Пример 49. Применить команду $D[f]$ для вычисления выражений в аналитическом виде: 1) $(x^n\sin x)'_x$, 2) $\frac{\partial}{\partial x}(nxe^{x/c})$, 3) $\left(\ln\frac{x}{25}\right)'$, 4) $(ax^2+bx+c)'_x$, 5) $\frac{d^4}{dx^4}(x^n)$, 6) $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(x^m y^n)$.

<u>Решение.</u> При вводе соответствующих выражений получим следующий результат:

$$In[1] = D[x\verb|^|n * Sin[x], x]$$

$$Out[1] = x^n\,\mathrm{Cos}[x] + nx^{-1+n}\,\mathrm{Sin}[x]$$

$$In[2] = D[n * x * Exp[x/c], x]$$

$$Out[2] = e^{x/c}n + \frac{e^{x/c}nx}{c}$$

$$In[3] = D[Log[x/25], x]$$

$$Out[3] = \frac{1}{x}$$

$$In[4] = D[a * x\verb|^|2 + b * x + c, x]$$

$$Out[4] = b + 2ax$$
$$In[5] = D[x\hat{}n, \{x, 4\}]$$
$$Out[5] = (-3+n)(-2+n)(-1+n)nx^{-4+n}$$
$$In[6] = D[(x\hat{}m) * y\hat{}n, x, y]$$
$$Out[6] = mnx^{-1+m}y^{-1+n}$$

Пример 50. Вычислить производные указанных функций разными способами:

1) v', где $v(u) = (u^2 + u - 2)/(u^3 - 1)$;

2) y', y'', y''', где $y(x) = 2\sin 3x + x^7$.

Решение.

$In[1] = v[u] := (u^2 + u - 2)/(u^3 - 1)$

$In[2] = D[v[u], \{u, 1\}]$

$$Out[2] = -\frac{3u^2(-2+u+u^2)}{(-1+u^3)^2} + \frac{1+2u}{-1+u^3}$$

$In[3] = y[x] := 2 * \mathrm{Sin}[3 * x] + x\hat{}7$

$In[4] = D[y[x], x]$	$Out[4] = 7x^6 + 6\,\mathrm{Cos}[3x]$
$In[5] = D[\%, x]$	$Out[5] = 42x^5 - 18\,\mathrm{Sin}[3x]$
$In[6] = D[y[x], \{x, 2\}]$	$Out[6] = 42x^5 - 18\,\mathrm{Sin}[3x]$
$In[7] = D[D[D[y[x], x], x], x]$	$Out[7] = 210x^4 - 54\,\mathrm{Cos}[3x]$
$In[8] = D[y[x], \{x, 3\}]$	$Out[8] = 210x^4 - 54\,\mathrm{Cos}[3x]$

Замечание. Как показывают вышеприведенный пример, для вычисления высших производных возможно последовательное применение функции $D[f]$.

В целом средства для символьного вычисления производных, имеющиеся в ядре системы *Mathematica*, охватывают большинство математических выражений. Они могут включать в себя как *элементарные*, так и специальные математические функции, что выгодно отличает систему *Mathematica* от некоторых простых систем символьной математики.

3.5 Применение *Mathcad* при вычислении производной функции

Для вычисления производных функций в *MathCAD* можно применять следующее:

1. панель *Calculus* (Вычисления) путем нажатия специальной кнопки <*Derivative*> (Производная),

2. ввод с клавиатуры сочетания клавиш <**Shift**>+</> или вопросительный знак <**?**>.

В результате появляется оператор вычисления производной $\frac{d}{dx}$ (см. рис. 11). Дифференцируемое выражение следует записывать после этого оператора.

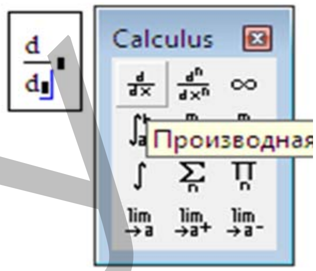

Рис. 11. Оператор дифференцирования

В зависимости от того, какой результат необходимо получить, нужно выполнить следующее:

1. ввести знак равенства (для численного вычисления),

2. ввести знак символьного равенства ($->$) или окружить все выражение выделяемой рамкой и нажать <**Shift**>+<**F9**> (для символьного способа вычисления).

Вычисление производной функции в точке

Чтобы найти производную функции $f(x)$ в точке, можно:

1 способ

- определить точку x, в которой будет вычислена производная, например $x := 1$,
- ввести оператор дифференцирования,
- в местозаполнителях (рис. 12) ввести функцию, зависящую от аргумента, и имя самого аргумента,
- ввести оператор «$=$» численного или «$->$» символьного вывода для получения ответа.

Пример 51. Найти производную функции $f(x) = \cos x \ln x$ в точке $x = 0{,}03$.

Решение. Численный и символьный результаты представлены на рисунке 12.

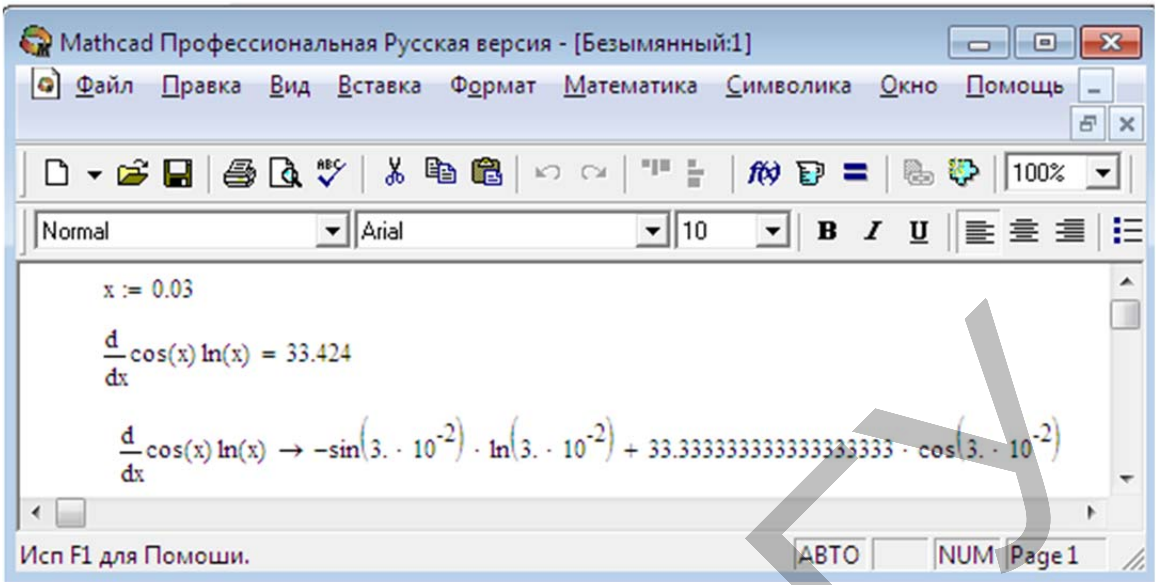

Рис. 12. Численное и символьное дифференцирование

Замечание. Численное дифференцирование возможно только при указании определенной точки. Иначе будет выдано сообщение об ошибке. В этом случае вместо значения производной будет выдана аналитическая зависимость.

2 способ

- присвоить какой-либо новой функции значение производной от искомой функции,
- подставить значение аргумента в эту новую функцию.

Точность численного вычисления значения производной в точке очень высока: не менее семи знаков после запятой.

3 способ

- предварительно определить функцию в отдельном выражении,
- затем посчитать ее производную или применить оператор дифференцирования для определения собственных функций пользователя (см. следующий пример).

Пример 52. Выполнить символьное и численное дифференцирование функции пользователя $f(x) = \frac{1}{x}$.

Решение. $$f(x) := \frac{1}{x}$$
$$\frac{d}{dx}f(x) \to \frac{-1}{x^2}$$
$$x := 0.1$$
$$\frac{d}{dx}f(x) = -100$$
$$\frac{d}{dx}f(x) \to -1.\cdot 10^2$$

Вычисление производных высших порядков

Mathcad позволяет численно определять производные до 5-го порядка включительно. Производные более высоких порядков функции вычисляются аналогично. Здесь используется оператор n-й производной $Nth\,Derivative$. Ввести этот оператор можно одним из способов:

- используя панели Calculus,
- с помощью сочетания клавиш **<Ctrl>+<Sfift>+</>**.

Появится символ, содержащий местозаполнители для порядка производной.

Пример 53. Выполнить численное и символьное вычисление второй производной функции $y = x^2 \cos x$ в точке $x = 0{,}1$.

Решение показано на рисунке 13.

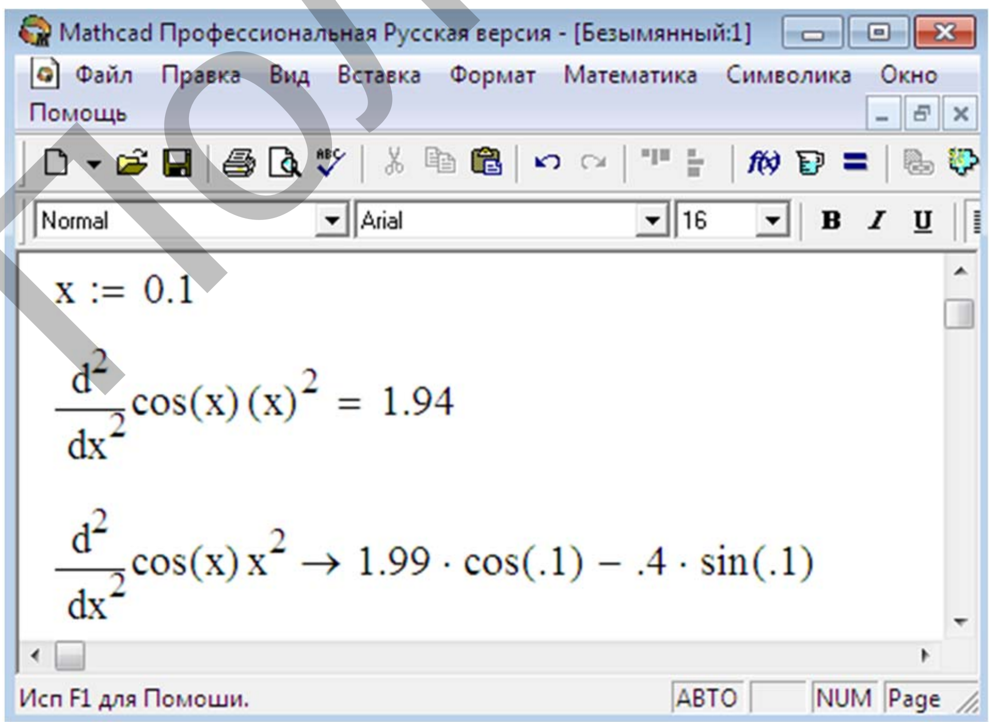

Рис. 13. Численное и символьное вычисление второй производной

Чтобы последнее выражение совпало с предыдущим, следует его выделить и упростить, выбрав в меню *Symbolics* (Символика) пункт *Symplify* (Упрощение). После этого ниже появится еще одна строка с численным результатом выделенного выражения.

Замечание. Чтобы вычислить производную выше 5-го порядка, следует последовательно применить несколько раз оператор n-й производной. Однако символьный процессор умеет считать производные выше 5-го порядка сразу.

Вычисление частных производных функции нескольких переменных

Чтобы вычислить частную производную, необходимо, ввести оператор производной с панели Calculus и в соответствующем местозаполнителе указать имя переменной дифференцирования.

Пример 54. Выполнить символьное и численное вычисление частных производных функции $f(x,y) = x^{2y} + {}$ $+y\sin x$ в точке $(1; 0{,}2)$.

<u>Решение</u> характеризует рисунок 14.

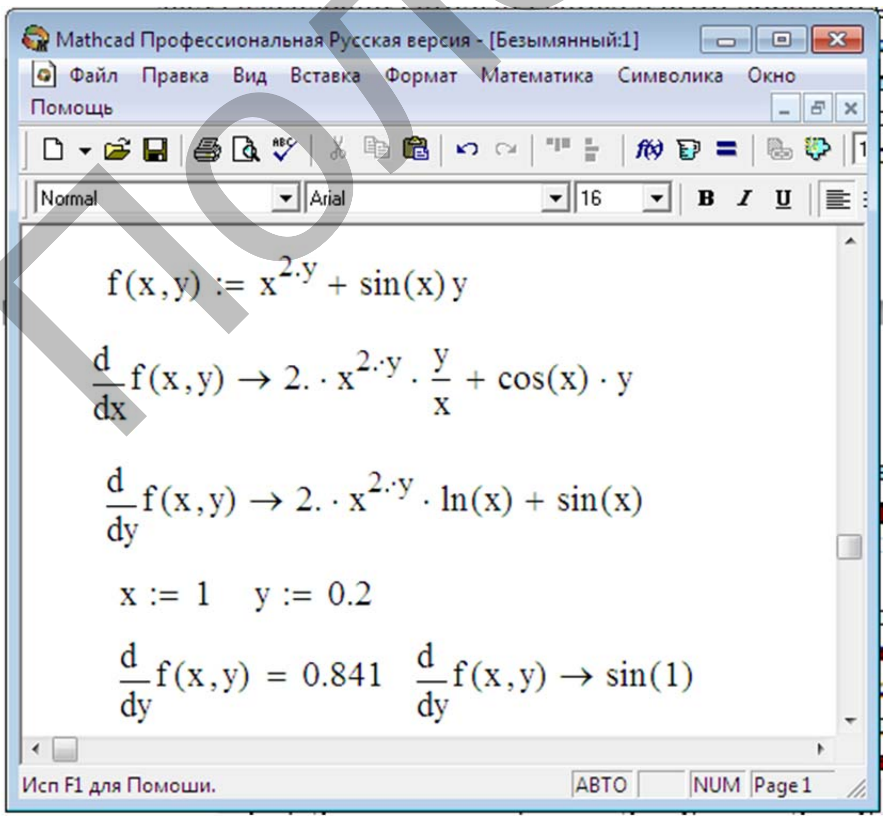

Рис. 14. Вычисление частных производных

Частные производные высших порядков рассчитываются аналогично. На рисунке 15 отражено вычисление частных производных второго порядка.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^{2\cdot y}+\cos(x)\cdot y\right) \to 4\cdot x^{2\cdot y}\cdot\frac{y^2}{x^2} - 2\cdot x^{2\cdot y}\cdot\frac{y}{x^2} - \cos(x)\cdot y$$

$$\frac{d^2}{dy^2}\left(x^{2\cdot y}+\cos(x)\cdot y\right) \to 4\cdot x^{2\cdot y}\cdot\ln(x)^2$$

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}\left(x^{2\cdot y}+\cos(x)\cdot y\right) \to 4\cdot x^{2\cdot y}\cdot\frac{y}{x}\cdot\ln(x) + 2\cdot\frac{x^{2\cdot y}}{x} - \sin(x)$$

Рис. 15. Вычисление частных производных второго порядка

Задания для решения

243) Найти производные функции $y = 19^{4x^{27}}$ до 3-го порядка включительно.

244) Найти производные функции $y = \ln\sqrt{1 - x^2}$ до 4-го порядка включительно в точке $x = 0{,}5$.

245) Вычислить дифференциалы функции $y = (\cos x^{15})^7$ до 3-го порядка включительно.

ОТВЕТЫ

1. $4x+1$. **2.** $20\,x^3-\frac{9}{7\sqrt[7]{x^4}}-\frac{35}{x^6}$. **3.** $x^3\cos x+3x^2\sin x$. **4.** $-8\,x^3/(x^4-1)^2$. **5.** $4(5x^4+3)\left(x^5+3x-1\right)^3$. **6.** $-x^2\left(x^3+\ 3\right)(x^3-1)\sqrt[3]{\frac{x^3-1}{\left(x^3+1\right)^2}}$. **40.** 32 ед/ч. **41.** 10 ден. ед., 5 ден. ед. **42.** 1, 0, 7. **43.** -2, 1. **44.** $y-5x+4=0$; $5y+x-6=0$. **45.** $2x+y-2=0$; $x-2y-1=0$. **46.** $y'=17/(2x+5)^2$. **47.** 2 м/с, 2 м/с, 6 м/с. **48.** $\frac{10x+3y}{4y-3x}$.

49. $-\frac{x^2y+y^3-x}{x^3+xy^2+y}$. **50.** $-\sqrt[3]{\left(\frac{y}{x}\right)^2}$. **51.** $\frac{xye^{x^2y^2}-2x^3}{2y^3-x^2ye^{x^2y^2}}$. **52.** $-\frac{2^x-2^{x+y}}{2^y-2^{x+y}}$.

53. $(-5\sin 5x\ln\sin 2x+2\cos 5x)\mathrm{ctg}2x(\sin 2x)^{\cos 5x}$.

54. $\left(4x^3\ln\mathrm{tg}\,3x+\frac{6x^4}{\sin 6x}\right)(\mathrm{tg}\,3x)^{x^4}$. **55.** $(x^4+1)^{\mathrm{tg}7x}\times\left(\frac{4\,x^3\mathrm{tg}\,7x}{x^4+1}+\frac{7\ln\left(x^4+1\right)}{\cos^2 7x}\right)$. **58.** $60x^2-18$. **59.** $\frac{24}{x^5}$. **60.** 0,54.

61. $2xe^{-x^2}\left(2x—1\right)$. **62.** $2\mathrm{arctg}\,x+\frac{2x}{1+x^2}$. **63.** $10,\ -10,\ 6,\ 0, 0, \ldots$. **64.** $v=-3,3,27$ м/с, $\omega=0,12,60$ м/с^2. **66.** $-\frac{5}{9}$. **67.** $-\frac{4}{3}$. **68.** $4,75$. **69.** $(3x^2+4x-3)dx$. **70.** $\frac{2x+1}{x^2+x}dx$.

71. $\frac{3x\,\mathrm{tg}^2x+\cos^2x\,\mathrm{tg}^3x}{\cos^2x}dx$. **72.** $(\cos x^2-2x^2\sin x^2)\,dx^2$.

73. $xe^{-x^3}(3x^3-2)$. **74.** $16\sin 4x$. **75.** $(6\ln x-7)\,/x^4$. **76.** $\approx\ 2,0156$; $\approx\ 2,9630$. **77.** $\approx 0,5151$; $\approx 0,0175$. **78.** $\approx\ 1,03$; $\approx -0,05$. **79.** $(3x^2\ln x+x^2)dx$; $(6x\ln x+5x)dx^2$; $(6\ln x+11)dx^3$. **80.** $(2x\,\mathrm{arctg}\,x+1)dx$, $\left(2\,\mathrm{arctg}\,x+\frac{2x}{1+x^2}\right)dx^2$. **81.** $\Delta y=\Delta x\left(3x^2+3(x-1)\Delta x-6x+3+(\Delta x)^2\right)$; $dy=3(x-1)^2\Delta x$; при $\Delta x=0,01$, $\Delta y=0,0303$, $dy=0,03$. **82.** $\Delta y=\sqrt{1+(x+\Delta x)^2}-\sqrt{1+x^2}$; $dy=\frac{x\Delta x}{\sqrt{1+x^2}}$; при $x=0$, $\Delta x=-0,01$ $\Delta y=\ 0,00005$, $dy=0$. **83.** 1/3. **84.** 2. **85.** 4/3. **86.** 1/2. **87.** $e^{\frac{2}{\pi}}$. **88.** 1. **89.** e^2. **90.** 7/2. **91.** e^{-2}. **92.** $-\frac{\pi}{4}$. **93.** 1. **94.** 3. **95.** e^{-1}.

96. Возрастает на $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$, убывает на $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **97.** Убывает на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, возрастает на $(-1; 1)$. **98.** Убывает на $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$, возрастает на $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$. **99.** Убывает на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, возрастает на $(-1; 1)$. **100.** Убывает на $(-\infty; -2)$, $(8; +\infty)$, возрастает на $(-2; 8)$. **101.** Возрастает на $\left(-\infty; -\frac{8}{3}\right)$, $(0; +\infty)$, убывает на $\left(-\frac{8}{3}; 0\right)$. **102.** Возрастает на $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$, убывает на $(-1; 0)$, $(0; 1)$. **103.** Возрастает на $(e; +\infty)$, убывает на $(0; 1)$, $(1; e)$. **104.** Возрастает на $(0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0)$. **105.** Возрастает на $(-\infty; 2)$, убывает на $(2; +\infty)$. **106.** Убывает на $(-1; 3)$, возрастает на $(-\infty; -1)$, $(3; +\infty)$, $y_{\min} = -20$, $y_{\max} = 12$. **107.** $y_{\min} = y(1) = y(5) = 0$, $y_{\max} = y(3) = 2\sqrt[3]{2}$. **108.** $y_{\min} = y(0) = 0$. **109.** $y_{\min} = y(1) = 0$, $y_{\max} = y(e^{-2}) = 4e^{-2}$. **110.** $y_{\min} = y(-1) = y(1) = 0$, $y_{\max} = y(0) = 1$. **111.** $y_{\min} = y(3) = -11$, $y_{\max} = y\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{41}{27}$. **112.** $y_{\min} = y(0) = 0$, $y_{\max} = y(2) = \frac{4}{e^2}$. **113.** $y_{\min} = y(-2) = -1$, $y_{\max} = y(2) = 1$. **114.** Экстремума нет. **115.** Экстремума нет. **116.** $y_{\min} = y(0) = 0$. **117.** 10×15. **118.** 10×20. **119.** $r = h = \frac{P}{\pi+4}$. **120.** $\sqrt{6}$. **121.** $y_{\text{наим}} = y(-2) = -13$, $y_{\text{наиб}} = y(0) = 3$. **122.** $y_{\text{наим}} = y(1) = -6$, $y_{\text{наиб}} = y(5) = 266$. **123.** $y_{\text{наим}} = -\frac{7}{3}$, $y_{\text{наиб}} = 3$. **124.** $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}} = 8$. **125.** $y_{\text{наим}} = -9$, $y_{\text{наиб}} = 40$. **126.** $y_{\text{наим}} = -\frac{\pi}{2}$, $y_{\text{наиб}} = \frac{\pi}{2}$. **127.** $y_{\text{наим}} = y(1) = -1$, $y_{\text{наиб}} = y(-1) = \frac{1}{3}$. **128.** $y_{\text{наим}} = e^{-4} - e^4$, $y_{\text{наиб}} = e^2 - e^{-2}$. **129.** $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}} = 60$. **130.** $y_{\text{наим}}$, $y_{\text{наиб}}$ не существует. **131.** $\left(\frac{1}{2}; 14\frac{1}{2}\right)$, выпукла на $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$, вогнута на $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **132.** $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \ln 2\right)$, выпукла на $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, вогнута на $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **133.** $\left(-2; -\frac{2}{e^2}\right)$, выпукла на $(-\infty; -2)$, вогнута на $(-2; +\infty)$. **134.** $\left(-2; e^{-\frac{1}{2}}\right)$ и $\left(2; e^{-\frac{1}{2}}\right)$, выпукла на $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, вогнута на $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$. **135.** $(-1, \ln 2)$ и $(1, \ln 2)$, выпукла на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, вогнута на $(-1; 1)$. **136.** $(0, 0)$, выпукла на $(0; +\infty)$, вогнута на $(-\infty; 0)$. **137.** $x = \frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$. **138.** $y = -1$. **139.** $x = \pm 1$, $y = \pm x$. **140.** $x = -1$, $y = \frac{1}{2}x - 1$. **141.** $y = 2x$. **142.** Асимптот нет. **143.** $x = \pm 2$, $y = -1$. **144.** $y = 0$. **145.** $y = x - 4$. **146.** $y = x + \pi$ — правосторонняя, $y = x - \pi$ — левосторонняя. **147.** $y = x + 1$ — правосторонняя, $y = -x - 1$ — левосторонняя. **148.** $y_{\max} = y(0) = 0$, $y_{\min} = y(2) = -4$, точка перегиба $(1, -2)$. **149.** $y_{\min} = y(1) = 3$, точка перегиба $(-\sqrt[3]{2}, 0)$, асимптота $x = 0$. **150.** $y_{\min} = y(-3) = 4,5$, $y_{\max} = y(3) = -4,5$, точка перегиба $(0, 0)$, асимптоты $x = \pm\sqrt{3}$ и $y = -x$. **151.** $y_{\min} = y(-1) = 0$, точки перегиба $(-2, \ln 2)$ и $(0, \ln 2)$. **152.** $y_{\min} = y(0) = -1$, точка перегиба $(-1/2, -8/9)$; асимптоты $x = 1$ и $y = 0$. **153.** $y_{\max} = y(2) == 0$, точки перегиба $(1, \ln 2)$, $(3, \ln 2)$. **154.** $y_{\min} = y(-1) = y(1) = 2$, асимптота $x = 0$. **155.** $y_{\min} = y(e) = e$, асимптота $x = 1$, точка перегиба $(e^2, e^2/2)$. **167.** $3/2$. **168.** $2/5, 1/5$. **202.** $3x - y - z = 4$, $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-4}{-1}$. **206.** $x - y + 2z = \pm\sqrt{11/2}$. **207.** $z_{\max} = z(4, 4) = 15$. **208.** $z_{\max} = z(4, -2) = 13$. **209.** $z_{\min}(-1;\ 1) = 0$. **210.** $z_{\min} = z\left(0, -\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$. **211.** $z_{\max}(4, 4) = 28$. **212.** $z_{\min}(1, 1) = 3$. **213.** $z_{\min}(1, 1) = 7$. **214.** $z_{\max}(2, -2) = 8$. **215.** $z_{\min}(1;\ 4) = -21$. **216.** $z_{\min}(2;\ 0) = -10$. **217.** $z_{\min}(5;\ 0) = 1$. **218.** $z_{\min}(1;\ 1) == -1$. **219.** $z_{\max}(0, 0) = 10$. **220.** $z_{\min}(1;\ 0,5) = 0$. **221.** $z_{\max}(2, 2) = 8$. **222.** $z_{\min}(1; 0) = 0$. **223.** $z_{\max}(0, 0) = 0$. **224.** $z_{\min}(0; -2) = 0$. **225.** $\mathrm{z}_{\min} = \mathrm{z}(2, 1) = -28$, $\mathrm{z}_{\text{наиб}} == \mathrm{z}(-2, -1) = 28$. **226.** Точек экстремума нет. **227.** $z_{\text{наиб}}(-4, -1) = -97$. **228.** $z_{\max}(4, -2) = 13$. **229.** $z_{\min}(5;\ 6) = -86$. **230.** $z_{\min}(1;\ 1) = 3$. **231.** $z_{\min}(1;\ 1) == 7$. **232.** $z_{\min}(-1;\ 1) = 0$. 233. $z_{\max}(2, -2) = 8$. **234.** $z_{\min} =$

$= \boldsymbol{z}(-1,-2) = -5$; $\boldsymbol{z}_{\mathbf{max}} = \boldsymbol{z}(1,2) = 5$. **235.** Куб с ребром, равным $\sqrt[3]{\boldsymbol{V}}$. **236.** $\boldsymbol{z}_{\text{наиб}}(2,2) = 4$, $\boldsymbol{z}_{\text{наим}}(0,0) = \boldsymbol{z}(4,4) = 0$. **237.** $\boldsymbol{z}_{\text{наиб}}(0,0) = \boldsymbol{z}(3,3) = 0$, $\boldsymbol{z}_{\text{наим}}(3,0) = -3$.
238. $\boldsymbol{z}_{\text{наиб}}(1,2) = 17$, $\boldsymbol{z}_{\text{наим}}(1,0) = -3$. **239.** $\boldsymbol{z}_{\text{наиб}}(1,0) = 5$, $\boldsymbol{z}_{\text{наим}}(0,0) = 0$. **240.** $\boldsymbol{z}_{\text{наиб}}(3,3) = 6$, $\boldsymbol{z}_{\text{наим}}(2,0) = -4$. **241.** $\boldsymbol{z}_{\text{наиб}}(0,0) = 8$, $\boldsymbol{z}_{\text{наим}}(0,5) = 6$. **242.** $\boldsymbol{z}_{\text{наиб}}(0,6) = 36$, $\boldsymbol{z}_{\text{наим}}(0,0) = 0$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Аладьев, В.Е. Эффективная работа в MAPLE 6/7 / В.У. Аладьев. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2002. – 336 с.
2. Булдык, Г.М. Сборник задач и упражнений по высшей математике с примерами решений / Г.М. Булдык.– Минск: ООО «Юнипресс», 2002. – 400 с.
3. Валуцэ, И.И. Математика для техникумов на базе средней школы: учеб. пособие / И.И. Валуцэ, Г.Д. Дилигул. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 576 с.
4. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие. – 13-е изд., испр. – М.: Изд-во Моск. ун-та, ЧеРо, 1997. – 624 с.
5. Доманова, Ю.А. Высшая математика на базе Mathcad. Общий курс / Ю.А. Доманова, А.А. Черняк, Ж.А. Черняк; под ред. Ю.А. Доманова. – М.: BHV-СПб, 2004 – 645 с.
6. Дьяконов, В.П. Mathematica v. 4.1, v. 4.2, v. 5.0 в математических и научно-технических расчетах: самая мощная система компьютерной математики, выполнение аналитических вычислений, выполнение численных вычислений, описание различных версий, практические примеры / В.П. Дьяконов.– М.: Солон-Пресс, 2004 – 696 с.
7. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И. Запорожец. – 4-е изд. – М.: Высш. шк., 1966. – 460 с.
8. Звавич, Л.И. Сборник задач по алгебре и математическому анализу для 10-11 классов: учеб. пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением

математики / Л.И Звавич, А.Р. Рязановский, А.М. Поташник; под ред. Л.И Звавич. – М.: Новая школа, 1996. – 96 с.

9. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; Под ред. Проф. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ, 2003. – 471 с.

10. Кундышева, Е.С. Математика: уч. пос. для экономистов. Е.С. Кундышева. – М.: Изд.-торг. корпорация «Дашков и К°», 2005. – 36 с.

11. Майсеня, Л.И. Математика в примерах и задачах: учеб. пособие для учащихся колледжей: в 6 ч. Ч.3: Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия в пространстве. Предел и непрерывность функции. Дифференциальное исчисление. Функции многих переменных / Л.И. Майсеня, М.А. Калугина, Е.В. Уласевич, Н.В. Михайлова. – 2007. – 282 с.

12. Половко, А.М. Mathematica для студентов / А.М. Половко. – СПб.: BHV-СПб, 2007. – 368 с.

13. Рябушко, А.П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учеб. пос. В 3 ч. Ч.1 / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть; Под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 1990. – 371 с.

14. Рябушко, А.П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учеб. пос. В 3 ч. Ч.2 / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть; Под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 1991. – 352 с.

Учебное издание

Романова Марина Александровна
Базака Людмила Николаевна

Высшая математика. Дифференциальное исчисление и его приложения

Сборник задач

Ответственный за выпуск *П.Б. Пигаль*

Корректор *Т.Т. Шрамук*
Компьютерный дизайн *А.А. Пресный*

Подписано в печать 27.02.2013 г. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс». Ризография.
Усл. печ. л. 4,01. Уч.-изд л. 1,7.
Тираж 650 экз. Заказ № 118.

Отпечатано в редакционно-издательском отделе
Полесского государственного университета
225710, г. Пинск, ул. Днепровской флотилии, 23