А.В. Копытовских
Полесский государственный университет
г. Пинск, Республика Беларусь

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА СТАБИЛЬНОСТИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

К прогрессивным направлениям контроля производственных процессов, получившим в настоящее время широкое распространение во всех промышленно развитых странах мира, относятся статистические методы, применяемые как на конечных стадиях выпуска готовой продукции, так и на стадиях отдельных технологических процессов и операций. Эти методы, основанные на законах теории вероятностей и математической статистики, позволяют сделать соответствующее заключение о качестве продукции или точности технологического процесса по результатам ограниченного числа выборок.

Статистический контроль в широком понимании этого слова включает статистический анализ точности и стабильности, приемы регулирования технологических процессов и статистический приемочный контроль. Процесс регулирования в данном случае заключается в том, что в определенные моменты времени из совокупности единиц продукции, полученной на стадии данного технологического процесса, делают выборку и измеряют контролируемый параметр. По результатам измерений определяют одну или несколько статистических характеристик, значения которых наносят на контрольные карты и на основании последних принимают решение о необходимости корректировки технологического процесса или о его продолжении в фактическом режиме.

Однако указанный статистический метод не дает ответа на вопрос, на сколько надежен сам технологический процесс. Для решения этой проблемы автором предложена методика оценки технологических процессов, основанная на положениях теории случайных функций и теории надежности.

Любой технологический процесс можно охарактеризовать вероятностью непревышения контролируемым параметром допустимых значений. Если значения этой вероятности близки к 1, то рассматриваемое событие (непревышение контрольных значений) произойдет обязательно. В случае же вероятности, близкой к нулю, событие не произойдет, т.е. надежность технологического процесса обеспечена не будет. Таким образом, если вероятность P непревышения контрольным параметром W допустимых его значений W_d в течение заданного срока T имеет значение не менее чем заданная (нормативная) вероятность P, технологический процесс проходит надежно, т.е.

$$P \geq P(W \leq W_d) \tag{1}$$

Учитывая принятый в статистическом регулировании технологических процессов нормальный закон распределения контролируемого параметра во времени и условно принимая значения параметров в выборке одинаковыми (т.е. все значения параметров равны их математическому ожиданию), запишем выражение для плотности распределения контролируемого параметра на временном интервале

$$f(W) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(W - \overline{W})^2}{2\sigma^2}\right], \tag{2}$$

где $f(W)$ – плотность распределения параметра во времени;

W - измеренное значение параметра в любой момент времени;

$\overline{W}$ - математическое ожидание контролируемого параметра;

σ - стандартное отклонение параметра.

Поскольку достижение критических значений параметра, при которых происходит недопустимое снижение качества производимой продукции, является в нормально функционирующем технологическом процессе редким событием, процесс наступления неравенства $W > W_d$ можно считать Пуассоновским законом распределения.

$$P_n = \frac{(\mu T)^n}{n!}\exp(-\mu T), \tag{3}$$

где P_n – вероятность того, что за время T произойдет n выбросов случайной функции контролируемого параметра $W(t)$ за уровень W_d;

μ - средняя частота выбросов $W(t)$ за уровень W_d.

Вероятность отсутствия указанных выбросов за время T, т.е. функция надежности, при которой $n=0$, запишется в следующем виде

$$P = exp(-\mu T), \tag{4}$$

Определить среднее число выбросов случайной функции за допустимый уровень несложно, допуская процесс изменения величины контролируемого параметра стационарным, подчиняющимся нормальному закону распределения. При этом выбросом случайной функции за данный уровень a называется пересечение графиком этой функции горизонтальной прямой, отстоящей от оси на расстоянии a.

Из теории случайных функций известно, что среднее число выбросов n_a за время T и средняя длительность выброса τ соответственно равны

$$\overline{n_a} = T\int_0^{\infty} Vf(a,V)\,\partial V; \tag{5}$$

$$\overline{\tau} = \frac{\int_0^{\infty} f(x)\,\partial x}{\int_0^{\infty} Vf(a,V)}, \tag{6}$$

где V – скорость случайной функции x.

Средняя частота выбросов для стационарного процесса определяется выражением

$$\overline{\mu}_a = \frac{\overline{n_a}}{T}, \tag{7}$$

или

$$\overline{\mu}_a = \int_0^{\infty} Vf(a,V)\,\partial V, \tag{8}$$

Двухмерная плотность распределения вероятности $f(x,V)$ в данном случае распадается на произведение нормальных плотностей для x и V

$$f(x,V) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma_x^2}\right]\frac{1}{\sigma_v\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{V^2}{2\sigma_v^2}\right], \tag{9}$$

где дисперсия скорости изменения ординаты случайной функции σ_v равна значению корреляционной функции скорости в нуле, а математическое ожидание V_t равно нулю.

После подстановки (9) в (8) получаем

$$\overline{\mu_a = \frac{\sigma_v}{2\pi\sigma_2}\exp\left[-\frac{(a-\overline{x})^2}{2\sigma_x^2}\right]}, \tag{10}$$

После подстановки (9) в (6) имеем

$$\overline{\tau} = \pi\frac{\sigma_x}{\sigma_v}\exp\left[\frac{(a-\overline{x})^2}{2\sigma_x^2}\right]\left[1-\Phi\left(\frac{a-\overline{x}}{\sigma_2}\right)\right], \tag{11}$$

где Φ – интегральная функция Лапласа.

Если рассматривать выбросы за нулевой (средний) уровень т.е. при а $=\overline{x}$, формула (11) упрощается

Из теории случайных функций известно

$$\overline{\tau} = \pi \frac{\sigma_x}{\sigma_v}, \tag{12}$$

где N_0 – среднее число нулей случайного процесса за время T_0.

Подстановка (13) в (10) дает выражение для расчета средней частоты выбросов случайной функции

$$\overline{\mu}_0 = \frac{N_0}{T_0}, \tag{14}$$

$$\overline{\mu}_0 = \overline{\mu}_0 \exp[-\frac{(a-\overline{x})^2}{2\sigma_x^2}], \tag{15}$$

Для контролируемого параметра в технологическом процессе можно записать

$$\mu = \overline{\mu}_0 \exp[-\frac{(W_d - \overline{W})^2}{2\sigma^2}], \tag{16}$$

где W_d – допустимый (возможный) уровень , соответствующий частоте μ.

В результате совместного решения (16) и (4) получаем выражение для расчета надежности технологического процесса

$$P = \exp\{-\frac{\mu T}{\exp[(W_d - \overline{W})^2/2\sigma^2]}\}, \tag{17}$$

Решение (16) и (4) относительно W_d дает расчетную формулу для определения возможных максимальных значений контролируемого параметра с вероятностью P.

$$W_d^{\max} = \overline{W} + \sigma\sqrt{2\ln[\overline{\mu}T/\ln(1/P)]}, \tag{18}$$

Учитывая, что нормальное распределение симметрично относительно математического ожидания, для минимального предела контролируемого параметра можно записать

$$W_d^{\min} = \overline{W} - \sigma\sqrt{2\ln[\mu T/\ln(1/P)]}, \tag{19}$$

Зависимости (17)-(19) могут использоваться для расчетов в случае, если стандартное отклонение выборки $\sigma_s \to 0$. На практике такие случаи встречаются крайне редко, т.е. стандартное отклонение в пределах выборки может принимать определенные значения, а, следовательно, требуется учет этих отклонений.

Уравнение закона изменения среднего числа выбросов за уровень W во времени имеет следующий вид

$$\overline{\mu}_t = \overline{\mu}\exp[-\frac{(W-\overline{W})^2}{2\sigma_t^2}] \qquad (20)$$

где μ - средняя частота, устанавливаемая по зависимости (14),

σ_t – стандартное отклонение контролируемого параметра во времени t.

Распределение параметров технологического процесса в выборке для любого периода времени априори можно принять подчиняющимся нормальному закону распределения. При этом функция плотности для параметра W записывается в виде

$$f(W) = \frac{1}{\sigma_s\sqrt{2\pi}}\exp[-\frac{(W-\overline{W}_{St})^2}{2\sigma_s^2}], \qquad (21)$$

где W_{St} – среднее значение параметра в выборке в момент времени t;

σ_s - стандартное отклонение параметра в выборке S.

Средняя частота выбросов функции может быть установлена по выражению

$$\mu = \int_0^\infty \overline{\mu}_t f(W)\,\partial W \qquad (22)$$

или

$$\mu = \int_0^\infty \overline{\mu}\exp[-\frac{(W-\overline{W})^2}{2\sigma_t^2}]\frac{1}{\sigma_s\sqrt{2\pi}}\exp[-\frac{(W-\overline{W}_{st})^2}{2\sigma_s^2}]\partial W =$$

$$= \frac{\overline{\mu}}{\sigma_s\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \exp[-\frac{(W-\overline{W})^2}{2\sigma_t^2} - \frac{(W-\overline{W}_{st})^2}{2\sigma_s^2}]\partial W. \qquad (23)$$

Последнюю зависимость можно представить следующим образом

$$\mu = \frac{\overline{\mu}}{\sigma_s\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \exp\{-[\frac{(W-\alpha)^2}{2\beta} + \frac{(\overline{W}_{St}-\overline{W})^2}{2(\sigma_t^2+\sigma_s^2)}]\}\partial W \qquad (24)$$

где

$$\alpha = \frac{\sigma_s^2 W + \sigma_t^2\overline{W}}{\sigma_s^2+\sigma_t^2} \qquad \beta = \frac{\sigma_s^2\sigma_t^2}{\sigma_s^2+\sigma_t^2}$$

Обозначим

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}}\int_0^\infty \exp[-\frac{(W-\alpha)^2}{2\beta}]\partial W$$

При нормальном законе распределения, согласно правилу трех сигм

$$\alpha = 3\sqrt{\beta}, I \approx 1$$

Поскольку значение параметра W_{St} является для вероятности P средним допустимым значением, обозначив допустимый уровень параметра $W_d = \overline{W}_{St}$, получаем зависимость для средней частоты выбросов в единицу времени

$$\mu = \frac{\overline{\mu}\sigma_t}{\sqrt{\sigma_t^2\sigma_s^2}} \exp\left[-\frac{(W_d - \overline{W})^2}{2(\sigma_t^2 + \sigma_s^2)}\right] \qquad (25)$$

При совместном решении (25) и (4) получаем зависимость для расчета надежности объекта

$$P = \exp\left\{-\frac{\overline{\mu}Tj}{\exp[(W_d - \overline{W})^2/2(\sigma_t^2 + \sigma_s^2)]}\right\}, \qquad (26)$$

где

$$j = \left(\frac{\sigma_t}{\sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_s^2}}\right)$$

Решение тех же уравнений относительно W_d дает зависимость для расчета допустимых с вероятностью P максимальных и минимальных значений контролируемого параметра

$$W_d^{max} = \overline{W} + \sqrt{2(\sigma_t^2 + \sigma_s^2)\ln[\overline{\mu}Tj/\ln(1/P)]}$$

$$W_d^{min} = \overline{W} - \sqrt{2(\sigma_t^2 + \sigma_s^2)\ln[\overline{\mu}Tj/\ln(1/P)]}$$

Таким образом, полученные зависимости позволяют рассчитать надежность технологического процесса по одному или нескольким контролируемым параметрам, а также определить с заданной вероятностью допустимые максимальные и минимальные значения параметра. Расчеты могут выполняться для любого заданного срока T. При этом входящие в расчетные уравнения показатели определяются на основании статистических рядов наблюдений за параметрами диагностируемых технологических процессов.