УДК 519.6 + 517.983.54

АЛГОРИТМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С САМОСОПРЯЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

А.В. Олесик*, 5 курс*
Научный руководитель – ***О.В. Матысик****, к.ф.-м.н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

В работе рассматривается операторное уравнение I рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с действующим в гильбертовом пространстве H ограниченным положительным самосопряженным оператором $A: H \to H$, в предположении, что нуль принадлежит спектру этого оператора, однако, вообще говоря, не является его собственным значением. При сделанных предположениях задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если решение уравнения (1) все же существует, то для его отыскания предлагается регуляризатор в виде итерационной процедуры явного типа

$$x_{n+1} = (E - \alpha A)^2 x_n + 2\alpha y - \alpha^2 Ay, \; x_0 = 0. \tag{2}$$

Обычно правая часть уравнения (1) известна с некоторой точностью δ, т.е. известен y_δ, для которого $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Поэтому вместо схемы (2) приходится рассматривать приближения

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta - \alpha^2 Ay_\delta, \; x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Ниже, под сходимостью процедуры (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ [1]. Иными словами, если $\lim\limits_{\delta \to 0}\left(\inf\limits_{n}\|x - x_{n,\delta}\|\right) = 0$.

Изучим сходимость итерационной процедуры (3) в случае единственного решения в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, $x \in H$. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем, что $x_{0,\delta} = x_{1,\delta} = 0$ и рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = \left(x - x_n\right) + \left(x_n - x_{n,\delta}\right)$.

По индукции нетрудно показать, что $x_n = A^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A\right)^{2n}\right]y$. Тогда

$$x - x_n = A^{-1}(E - \alpha A)^{2n}\, y = (E - \alpha A)^{2n}\, x\,.$$

Разность $x - x_n$ бесконечно мала в норме пространства H при $n \to \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для ее оценки необходима дополнительная информация на гладкость точного решения x – его истокообразная представимость, т.е. что $x = A^s z,\ s > 0$. При использовании энергетической нормы нам это дополнительное предположение не потребуется. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора A имеем

$$\left\|x - x_n\right\|_A^2 = \left(A(E - \alpha A)^{2n} x, (E - \alpha A)^{2n} x\right) = \int\limits_0^M \lambda(1 - \alpha\lambda)^{4n}\, d(E_\lambda x, x)\,,$$

где $M = \|A\|$, E_λ – соответствующая спектральная функция, E – единичный оператор. Нетрудно показать, что при $\alpha \in \left(0,\ 5/(4M)\right]$ выполняется $\left\|x - x_n\right\|_A \le (4n\alpha e)^{-1/2}\|x\|$.

Оценим $x_n - x_{n,\delta}$. Справедливо равенство

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A\right)^{2n}\right]\left(y - y_\delta\right) = \int\limits_0^M \lambda^{-1}\left[1 - \left(1 - \alpha\lambda\right)^{2n}\right] dE_\lambda\left(y - y_\delta\right).$$

Тогда $\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\|_A^2 = \int\limits_0^M \lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^{2n}\right]^2 d(E_\lambda(y - y_\delta), y - y_\delta)\,.$

Обозначим через $g(\lambda)$ подынтегральную функцию и оценим ее сверху при условии $\alpha \in \left(0,\ 5/(4M)\right]$. Покажем, что при любом $p = 2n \in H$ выполняется неравенство

$$g(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^p\right]^2 \le \left(35/54\right)p\alpha, \quad p \ge 2. \tag{4}$$

При $p = 2$ утверждение верно. Предположим, что оно справедливо при $p = l$, т.е. $\lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^l\right]^2 \le \left(35/54\right)l\alpha$, и покажем, что (4) выполняется при $p = l + 1$. Рассмотрим интересующее нас выражение

$$\begin{aligned}\lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^{l+1}\right]^2 &= \lambda^{-1}\left[1 - 2(1 - \alpha\lambda)^{l+1} + (1 - \alpha\lambda)^{2(l+1)}\right] = \\ = \lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^l\right]^2 &+ \lambda^{-1}\left\{2(1 - \alpha\lambda)^l \alpha\lambda - (1 - \alpha\lambda)^{2l}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^2\right]\right\} \le \\ &\le \left(35/54\right)l\alpha + \alpha\left[2(1 - \alpha\lambda)^l - (1 - \alpha\lambda)^{2l}(2 - \alpha\lambda)\right].\end{aligned}$$

Чтобы доказать требуемое, достаточно убедиться что

$$2(1 - \alpha\lambda)^l - (1 - \alpha\lambda)^{2l}(2 - \alpha\lambda) \le 35/54. \tag{5}$$

Рассмотрим два случая.

1). $1 \le \alpha\lambda \le 5/4$, l – чётное $(l \ge 2)$. Тогда $0 \le (1-\alpha\lambda)^l < 1$. Требуется доказать неравенство (5), что равносильно $1 - 2(1-\alpha\lambda)^l + (1-\alpha\lambda)^{2l} + {} + (1-\alpha\lambda)^{2l+1} - 19/54 \ge 0$, что в свою очередь равносильно

$$1 + (1-\alpha\lambda)^{2l}\ (2-\alpha\lambda) - \left[2(1-\alpha\lambda)^l + 19/54\right] \ge 0. \qquad (6)$$

Имеем $-1/4 \le 1 - \alpha\lambda \le 0$. Следовательно, $2(1-\alpha\lambda)^l + 19/54 < 1$, а поэтому неравенство (6) справедливо и, значит, верно доказываемое неравенство (5).

2). $0 < \alpha\lambda < 1$, l – чётное $(l \ge 2)$. Тогда $0 < (1-\alpha\lambda)^l < 1$. Неравенство (5) равносильно $35/54 - 2(1-\alpha\lambda)^l + (1-\alpha\lambda)^{2l} + (1-\alpha\lambda)^{2l+1} \ge 0$, которое в свою очередь равносильно

$$4/27 + 2\left[1/2 - (1-\alpha\lambda)^l\right]^2 + (1-\alpha\lambda)^{2l+1} - (1-\alpha\lambda)^{2l} \ge 0. \qquad (7)$$

Так как $2\left[1/2 - (1-\alpha\lambda)^l\right]^2 \ge 0$, то для доказательства справедливости неравенства (7) достаточно показать, что выполняется: $\varphi_l(\lambda) \equiv 4/27 + (1-\alpha\lambda)^{2l+1} - (1-\alpha\lambda)^{2l} \ge 0$. Нетрудно убедиться, что $\min\limits_{0 < \alpha\lambda < 1} \varphi_l(\lambda) \ge 0$ для $l \ge 2$. Отсюда вытекает справедливость неравенства (7) и, следовательно, неравенства (5). Эти два рассмотренных случая исчерпывают индукцию, значит, неравенство (4) справедливо. Таким образом, $\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\|_A^2 \le (35/54)2n\alpha\delta^2$, $n \ge 1$. Отсюда $\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\|_A \le \left[(35/27)n\alpha\right]^{1/2}\delta$, $n \ge 1$

Поскольку имеем $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A \le \left\|x - x_n\right\|_A + \left\|x_n - x_{n,\delta}\right\|_A \le \left\|x - x_n\right\|_A + {} + \left[(35/27)n\alpha\right]^{1/2}\delta$, $n \ge 1$ и $\left\|x - x_n\right\|_A \to 0$, $n \to \infty$, то для сходимости $\| x - x_{n,\delta} \|_A \to 0$, $n \to 0$, достаточно, чтобы $\sqrt{n}\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$.

Таким образом, если в процедуре (3) выбрать число итераций $n = n(\delta)$, зависящих от δ так, чтобы $\sqrt{n}\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$, то получим регуляризующий алгоритм, обеспечивающий сходимость к точному решению уравнения (1) в энергетической норме гильбертова пространства.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3)

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A \le (4n\alpha e)^{-1/2}\|x\| + \left[(35/27)n\alpha\right]^{1/2}\delta, \quad n \ge 1. \qquad (8)$$

При заданном δ найдем такое значение числа *n*, при котором оценка (8) становится минимальной; в результате получим $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A^{\text{опт}} \le (35/27)^{1/4} \times {} \times \left(2\delta\|x\|\right)^{1/2} e^{-1/4}$, $n_{\text{опт}} = (35/27)^{-1/2}\ (2\alpha)^{-1} e^{-1/2}\delta^{-1}\|x\|$.

Очевидно, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α. Но $n_{\text{опт}}$ зависит от α, поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать α возможно большим, удовлетворяющим условию $\alpha \in \left(0,\ 5/(4M)\right]$, и так, чтобы $n_{\text{опт}} \in N$.

Предложенный метод может быть применён для решения прикладных некорректных задач, встречающихся в технике, медицине, сейсмике, экономике.

Список использованных источников

1. Матысик, О.В. Итерационный метод неявного типа решения операторных уравнений первого рода в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 6. – С. 28–33.