УДК 513.82

# ИНВАРИАНТНЫЕ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА ДЛЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП ЛИ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ ЕВКЛИДОВА ЧЕТЫРЁХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА $R_4$


***А.С. Гловацкая**, 4 курс*

*Научный руководитель – **А.А. Юдов**, к.ф.-м.н., доцент*

*Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина*


В данной работе рассмотрено четырехмерное евклидово пространство $R_4$. Пусть $G$ – группа Ли движений пространства $R_4$, $H$ – группа Ли вращений пространства $R_4$, $\overline{G}$ – алгебра Ли группы Ли $G$, $\overline{H}$ – алгебра Ли группы Ли $H$.

Группу Ли $G$ движений пространства ${}^1R_4$ будем задавать как совокупность матриц вида [1] $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix}$, где $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}$, а 4×4 матрица $A$ удовлетворяет условию: $A\varepsilon_{0,1}A^{\mathrm{T}} = \varepsilon_{4,0}$, где $\varepsilon_{4,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Алгебра Ли $\overline{G}$ будет задаваться как совокупность матриц вида: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & B \end{pmatrix}$, где 4×4 матрица $B$ удовлетворяет условию $B\varepsilon_{4,0} + \varepsilon_{4,0}B = 0$. Точки пространства $R_4$ будем задавать в виде $\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x$. Группа $G$ действует в пространстве $R_4$ слева по правилу: $x \to a \cdot x$.

Группа Ли $G$ является полупрямым произведением группы Ли $H$ стационарности точки пространства $R_4$ и абелевой группы $T_4$ параллельных переносов пространства $R_4$: $G = H \otimes T_4$.

Алгебра Ли $\overline{G}$ является полупрямой суммой алгебры Ли $\overline{H}$ группы Ли $H$ и коммутативной алгебры Ли $\tau_4$ группы Ли $T_4$: $\overline{G} = \overline{H} \oplus \tau_4$.

Рассмотрим в пространстве $R_4$ базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\bar{e}_1^2 = 1$, $\bar{e}_2^2 = \bar{e}_3^2 = \bar{e}_4^2 = 1, (\bar{e}_i, \bar{e}_j) = 0, i \neq j$. Базис $\{i_1, i_2, \ldots, i_{10}\}$ в алгебре Ли $\overline{G}$ зададим следующим образом:

$$i_1 = E_{21},\ i_2 = E_{31},\ i_3 = E_{41},\ i_4 = E_{51},\ i_5 = E_{23} - E_{32},\ i_6 = E_{24} - E_{42},$$
$$i_7 = E_{25} - E_{52},\ i_8 = E_{34} - E_{43},\ i_9 = E_{35} - E_{53},\ i_{10} = = E_{54} - E_{45},$$

где $E_{\alpha\beta}$ – $(5\times 5)$-матрица, у которой в α-й строке и β-м столбце стоит единица, а остальные элементы нули, причем векторы $i_5$, $i_6$, ..., $i_{10}$ образуют базис алгебры Ли $\overline{H}$ группы Ли $H$ вращений, а векторы $i_1$, $i_2$, $i_3$, $i_4$ – базис алгебры Ли $\tau_4$ параллельных переносов пространства $R_4$.

В данной работе изучается однопараметрическая подгруппа $L$ Ли группы Ли $H$, базис алгебры Ли которой задаётся оператором $\{i_5 + \lambda\, i_{10}\}$. Для этой группы Ли находятся все инвариантные одно-, дву- и трёхмерные подпространства пространства $R_4$. Получаем следующую теорему.

**Теорема.** *Относительно группы Ли L инвариантны только*

1. *Одномерные подпространства* $\{pe_3 + qe_4\}$ *и, соответственно, прямые* $[O, p\ e_3 + q\ e_4]$, *причём* $\lambda=0$, $p$, $q$ *– любые.*

2. *Двумерные подпространства* $\{e_1, e_2\}$, $\{e_3, e_4\}$ *и, соответственно, плоскости* $[O, e_1, e_2]$ *и* $[O, e_3, e_4]$.

3. *Трёхмерные подпространства* $[e_1, e_2, pe_3 + qe_4]$ *и* $[O, e_3, e_4]$ *и, соответственно,* 3-*плоскости*: $[O, e_1, e_2, pe_3 + qe_4]$.

Полученные результаты могут быть использованы в теоретической физике и в специальной теории относительности [2].

**Список использованных источников**

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т. 1. – 343 с.

2. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М. : Мир, 1964. – 538 с.