УДК 336:330.43 (075.8)

О ПРИМЕНЕНИИ КОПУЛ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ФИНАНСОВЫХ ДАННЫХ

А.А. Зайковская, П.М. Лаппо
Белорусский государственный университет, zaikovskaya.anas@mail.ru, lappopm@bsu.by

Настоящая работа посвящена оценке двумерных распределений относительных приращений цен финансовых данных с помощью копул. В работе были рассмотрены относительные приращения цен акций пяти российских компаний. Графики динамики относительных приращений акций представлены на рисунках. Первоначально было проведено исследование, в котором выявлены акции с зависимыми приращениями. Таковыми оказались акции EERS и SBER. Для описания двумерных распределений относительных приращений цен зависимости были использованы копулы Заметим, что копулы представляют собой один из способов описания зависимостей между случайными величинами, который позволяет моделировать произвольные многомерные распределения из одномерных.

Полесгу

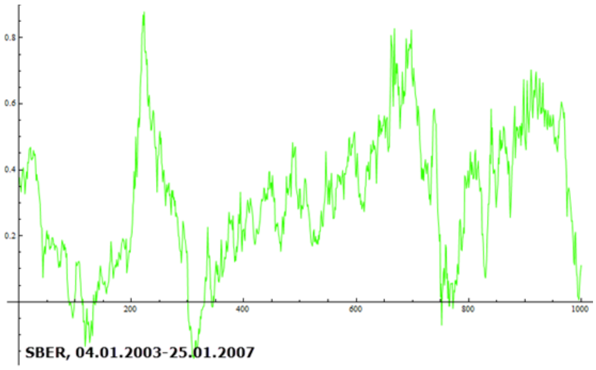

Рисунок 3 – Приращения акций SBER

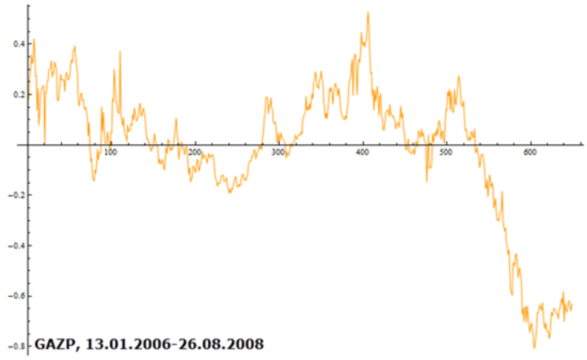

Рисунок 5 – Приращения акций GAZP

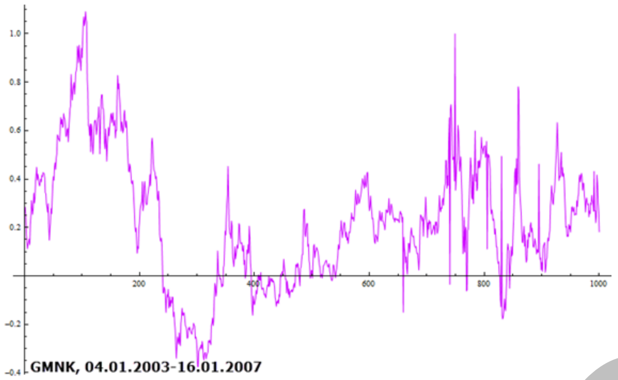

Рисунок 4 – Приращения акций GMNK

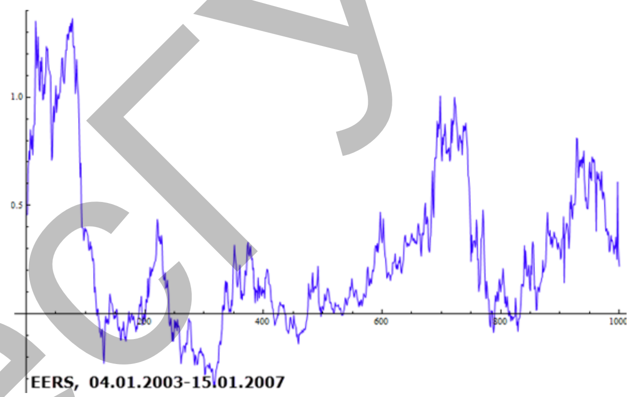

Рисунок 6 – Приращения акций EERS

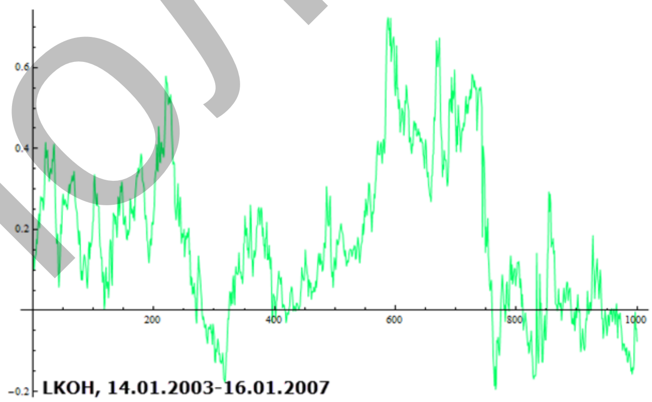

Рисунок 7 – Приращения акций EERS

ПолесГУ

При построении моделей использовался следующий факт: для любой двумерной случайной величины $Z = (Z_1, Z_2)$ с функцией распределения $F(z_1, z_2)$ и маргинальными функциями распределения $F_1(z_1)$ и $F_2(z_2)$ существует единственная функция $C: [0,1]^2 \mapsto [0,1]$, такая, что $F(z_1, z_2) = C\big(F_1(z_1), F_2(z_2)\big)$ (См. [1 ,с.5]). Функция C как раз и называется копулой для распределения $F(z_1, z_2)$.

Пакет MATLAB позволяет получать пары зависимых равномерно распределенных на [0,1] случайных величин с корреляционной матрицей, что помогло быстрее построить копулы Клейтона, Франка и Гумбеля для относительных приращений, в которых была обнаружена зависимость на первом этапе. Далее приведены результаты построения модели для акций EERS:

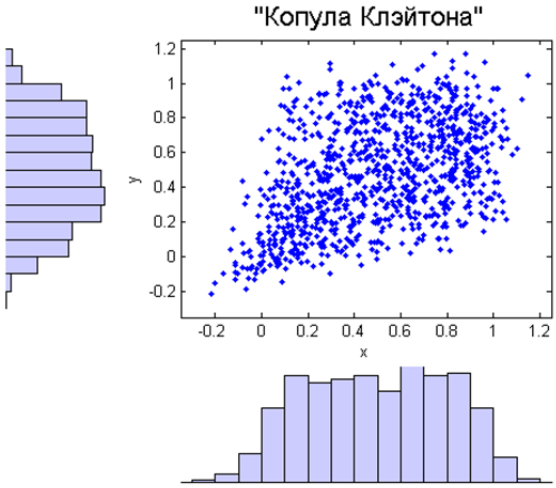

Рисунок 8 – Копула Клейтона для данных EERS

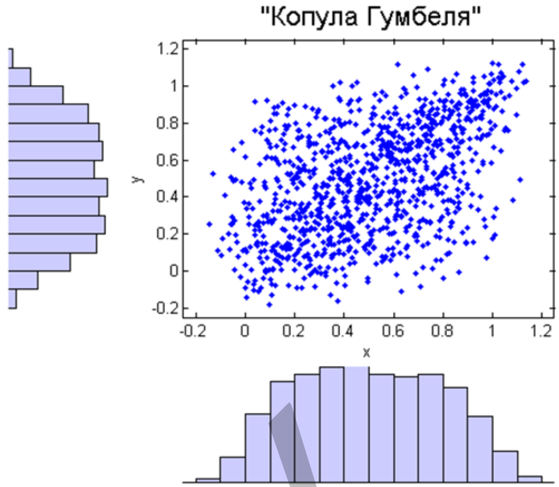

Рисунок 9 – Копула Гумбеля для данных EERS

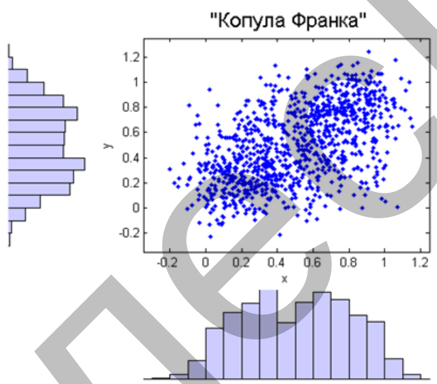

Рисунок 10 – Копула Франка для данных EERS

Далее проводился поиск копулы, наилучшим образом описывающей связь между исходными данными. Для этого использовался критерий согласия Пирсона, приведенный к двумерному варианту по построенным гистограммам:

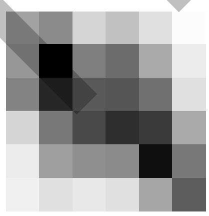

Рисунок 11 – Гистограмма копулы Гумбеля для данных EERS

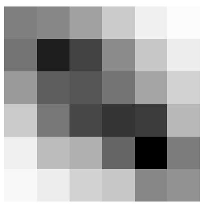

Рисунок 12 –Гистограмма копулы Клейтона для данных EERS

ПолесГУ

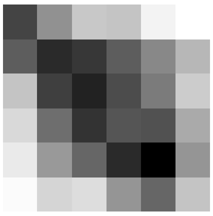

Рисунок 13 - Гистограмма
копулы Франка
для данных EERS

Копула Гумбеля:

$$C_\theta^{Gu}(u_1, u_2) = \exp(-\left[(-lnu_1)^\theta + (-lnu_2)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}). \quad (1)$$

Копула Клэйтона:

$$C_\theta^{Kl}(u_1, u_2) = \left[\,(u_1)^{-\theta} + (u_2)^{-\theta} - 1\right]^{-\frac{1}{\theta}}. \quad (2)$$

Копула Франка:

$$C_\theta^{Fr}(u_1, u_2) = -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right). \quad (3)$$

Где θ - параметр выражения зависимости между маргинальными компонентами [2, с. 21].
При оценке параметров использовался метод максимального правдоподобия.
Таблица 1 – Оценка параметров копул

Компания / Копула	EERS	SBER
Клейтона	θ = 0.2086	0.7268
Франка	θ = 1.5033	3.5274
Гумбеля	θ = 1.1438	1.4784

Для критерия Пирсона возьмём те интервалы, по которым была построена гистограмма. Эмпирические числа попаданий в эти интервалы n_{ij} мы сравниваем с теоретическим числом попаданий np_{ij}, где p_{ij} − вероятность попадания нашей величины в j-й интервал. Теоретическое распределение можно считать подобранным верно с доверительной вероятностью p, если суммарная квадратичная относительная разность между теоретическим и практическим числом попаданий в каждый интервал будет не очень большой. Число разбиений k = 36. Должно выполняться условие:

$$\sum_{i,j=1}^{k} \frac{\left(n_{ij} - np_{ij}\right)^2}{np_{ij}} \leq \chi_p^2(k - m). \quad (4)$$

Наилучше значение критерия достигается для копулы Клейтона.

При уровне значимости 0,05 нет оснований отвергать гипотезу о том, распределение описывается копулами Клейтона и Гумбеля,. однако для копулы Клейтона значение статистики хи-квадрат меньше.

Таблица 2 – Значения критерия согласия

Значения критерия Пирсона	Клэйтон	Франк	Гумбель
EERS	41.3	58,13	44,8

ПолесГУ

ПолесГУ

Список литературы:

1. Cherubini U. Multivariate option pricing with copulas / U. Cherubini , E. Luciano – Turin, 2000.
2. Cech C. Copula-based top-down approaches in financial risk aggregation / Cech C. – Vienna, 2006.