УДК 519.6 + 517.983.54

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Л.М. Альциванович, 5 курс
Научный руководитель – О.В. Матысик, к.ф.-м.н., доцент
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

В последние десятилетия в математической науке выделился важный раздел – теория некорректно поставленных задач и методы их приближённого решения. Развитие этого раздела математики вызвано многочисленными приложениями в технике, физике, экономике и других естественных науках, поскольку, прежде всего, в приложениях возникают и имеют большое значение подобные некорректные задачи. Потребности практики приводят к необходимости решения некорректно поставленных задач, которые во многих случаях описываются операторными уравнениями первого рода. Для их решения широко используются итерационные методы.

Будем рассматривать в гильбертовом пространстве H операторное уравнение первого рода

$$Ax = y \qquad (1)$$

с положительным ограниченным самосопряжённым оператором A, для которого нуль является собственным значением, т. е. задача (1) имеет неединственное решение. Предположим, что $y \in R(A)$, т. е. при точной правой части y уравнения решение (неединственное) задачи (1) существует. Для его отыскания используем итерационную схему явного типа

$$x_{n+1} = \left(E - \alpha A^2\right)x_n + \alpha Ay, \quad x_0 = 0. \qquad (2)$$

Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, $M(A)$– ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема. *Пусть* $A \geq 0$, $y \in H$, $0 < \alpha < 2\|A\|^{-2}$, *тогда для итерационного процесса* (2) *верны следующие утверждения*:

а) $Ax_n \to \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \to I(A, y) = \inf\limits_{x \in H}\|Ax - y\|$,

б) метод (2) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* *– минимальное решение уравнения.*

Доказательство.

Применив оператор A к методу (2), получим $Ax_n = Ax_{n-1} + \alpha A^2[P(A)y + \Pi(A)y - Ax_{n-1}]$, где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как $AP(A)y = 0$, то $Ax_n = Ax_{n-1} + \alpha A^2[\Pi(A)y - Ax_{n-1}]$.

Последнее равенство запишется в виде $v_n = v_{n-1} - \alpha A^2 v_{n-1}$, где $v_n = Ax_n - \Pi(A)y$ и $v_n \in M(A)$. Отсюда $v_n = \left(E - \alpha A^2\right)^n v_0$.

Имеем $A^2 \ge 0$ и A^2 – положительно определён в $M(A)$, т. е. $(Ax, x) > 0 \ \forall x \in M(A)$. Так как $0 < \alpha < 2\|A\|^{-2}$, то $\left\|E - \alpha A^2\right\| < 1$, поэтому, используя интегральное представление самосопряженного оператора A, получим

$$\|v_n\| = \left\|\left(E - \alpha A^2\right)^n v_0\right\| = \left\|\int_0^{\|A\|}\left(1 - \alpha\lambda^2\right)^n dE_\lambda v_0\right\| \le \left\|\int_0^{\delta_0}\left(1 - \alpha\lambda^2\right)^n dE_\lambda v_0\right\| +$$

$$+\left\|\int_{\delta_0}^{\|A\|}\left(1 - \alpha\lambda^2\right)^n dE_\lambda v_0\right\| \le \left\|\int_0^{\delta_0} dE_\lambda v_0\right\| + q^n(\delta_0)\left\|\int_{\delta_0}^{\|A\|} dE_\lambda v_0\right\| = \left\|E_{\delta_0} v_0\right\| + q^n(\delta_0)\left\|v_0 - E_{\delta_0} v_0\right\| < \varepsilon,$$

при $\delta_0 \to 0$ и $n \to \infty$. (Здесь $\left|1 - \alpha\lambda^2\right| \le q(\delta_0) < 1$ при $\lambda \in [\delta_0, \|A\|]$). Следовательно, $v_n \to 0$, откуда получаем, что $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. $\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A, y)$ [1]. Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$, следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (2) примет вид

$$x_n = x_{n-1} + \alpha A[\Pi(A)y - Ax_{n-1}] = x_{n-1} + \alpha A\left[Ax^* - Ax_{n-1}\right] = x_{n-1} + \alpha A^2\left[x^* - x_{n-1}\right].$$

Разобьём последнее равенство на два:

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + \alpha P(A)A^2\left(x^* - x_{n-1}\right) = P(A)x_{n-1} + \alpha A\left[AP(A)\left(x^* - x_{n-1}\right)\right] =$$
$$P(A)x_{n-1} = P(A)x_0,$$

так как $AP(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) = 0$.

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + \alpha\Pi(A)A^2\left(x^* - x_{n-1}\right) = \Pi(A)x_{n-1} - \alpha A^2\left[\Pi(A)\left(x_{n-1} - x^*\right)\right] =$$
$$= \Pi(A)x_{n-1} - \alpha A^2\left[\Pi(A)x_{n-1} - x^*\right],$$

так как $x^* \in M(A)$.

Обозначим $\omega_n = \Pi(A)x_n - x^*$, тогда $\omega_n = \omega_{n-1} - \alpha A^2\omega_{n-1}$ и, аналогично v_n, можно показать, что $\omega_n \to 0$, $n \to \infty$. Следовательно, $\Pi(A)x_n \to x^*$.

Отсюда $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$. Теорема доказана.

Замечание. *Так как* $x_0 = 0$, *то* $x_n \to x^*$, *т.е. процесс* (2) *обеспечивает сходимость к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.*

Предложенный метод можно эффективно использовать при решении различных некорректных задач, встречающихся в математической экономике, геофизике, спектроскопии, диагностике плазмы.

Список использованных источников

1. Bialy, H. Iterative Behandlung Linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, № 2. – P. 166-176.