УДК 519.622

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЯВНЫХ S-СТАДИЙНЫХ МЕТОДОВ РУНГЕ-КУТТЫ ДЛЯРЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А.А. Артюшеня, *4 курс*
Научный руководитель – ***В.М. Мадорский,*** *к.ф-м.н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

При применении метода прямых [1, с. 306] к нелинейной задаче теплопроводности:

(1) $$u_t' = ku_{xx}'' + f(x,t,u),$$

где $u(x,t)$ – решение (1) в области $\overline{Q_T} = [0,X]\times[0,T]$ с начальными и краевыми условиями:

(2) $$\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x), \\ u(0,t) &= \mu_1(t), \\ u(X,t) &= \mu_2(t), \end{aligned}$$

мы получаем систему нелинейных жёстких задач Коши.

Для решения задачи Коши вида:

(3) $$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad x_0 = a, \quad x \in [a,b],$$

где $f : G \subset R^2 \to R^2$ – вещественная функция, а G – замкнутая и ограниченная область, причем $(x_0, y_0) \in G$, применяем неявный s-стадийный метод Рунге-Кутты, который для задачи Коши (3) имеет вид:

(4) $$\overline{z_i} = h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(x_0 + c_j h, \overline{z_j} + y_0), \; i = \overline{1,s},$$

(5) $$y_1 = y_0 + h\sum_{j=1}^{s} b_j f(x_0 + c_j h, \overline{z_j} + y_0),$$

где рассматривается отрезок $[x_0, x_1]$; $y(x_1) = y_1$; $h = x_1 - x_0$; вектор $\overline{z_i}^T = \begin{bmatrix} z_i^{[1]} & \cdots & z_i^{[s]} \end{bmatrix}$.

c_j, b_j, a_{ij} $(i, j = \overline{1,s})$ – коэффициенты Бутчера; которые обычно представляются в виде таблицы Бутчера:

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ c_s & a_{s1} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \dots & b_s \end{array}$$

Суть самого метода заключается в том, что отрезок $[a,b]$ разбивается на n-частей корнями полинома Чебышева, и на каждом частичном отрезке решается задача (3), по формулам (4) и (5) с использованием принципа Рунге. После нахождения приближенного значения функции в узлах $x_i \ (i=\overline{1,n})$ с заданной точностью ε, проводится восстановление приближённого решения с помощью полиномов Чебышева.

Предложим следующий способ проверки качества полученного приближенного решения. Исходная задача (3) приводится к интегральному виду:

(6) $$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx,$$

далее на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ вычисляем норму невязки на приближенном решении

(7) $$\left\| \widetilde{y}_{i+1} - \widetilde{y}_i - \int_{x_0}^{x_{i+1}} f(x, \widetilde{y}(x))dx \right\|.$$

Интеграл, участвующий в норме невязки, будем вычислять высокоточным методом Эрмита-Маллера. Напрямую мы не можем применять эту формулу, для чего преобразуем подынтегральную функцию к виду

(8) $$f(x,\widetilde{y}(x)) = g(x,\widetilde{y}(x))/\sqrt{1-x^2}, \quad g(x,\widetilde{y}(x)) = f(x,\widetilde{y}(x))\sqrt{1-x^2},$$

Норма невязки (7) примет вид:

(9) $$\left\| \widetilde{y}_{i+1} - \widetilde{y}_i - \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x,\widetilde{y}(x))/\sqrt{1-x^2}\,dx \right\|.$$

А формула Эрмита-Маллера применительно к интегралу будет иметь вид:

(10) $$\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x,\widetilde{y}(x))/\sqrt{1-x^2}\,dx \cong \frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i,\widetilde{y}(x_i)),,$$

где x_i - корни полинома Чебышёва 1-ого рода.

Для проверки эффективности данного подхода рассмотрим задачу Филда-Нойса «орегонатор». Это простейшая математическая модель периодической химической реакции Белоусова-Жаботинского, она состоит из трех уравнений:

(8) $$\begin{cases} y_1' = 77{,}27\left(y_2 + y_1\left(1 - 8{,}375\cdot 10^{-6} y_1 - y_2\right)\right), \\ y_2' = -\dfrac{1}{77{,}27}\left(y_3 - (1+y_1)y_2\right), \\ y_3' = 0{,}161(y_1 - y_3), \end{cases}$$

с начальными условиями:

(9) $$\begin{cases} y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 2, \\ y_3(0) = 3. \end{cases}$$

Вычислительный эксперимент показал, что предложенный способ проверки качества полученного приближенного решения требует значительно меньше машинного времени в сравнении с классическим подходом, суть которого заключается в аппроксимации искомой функции полиномом и подстановке полинома в исходную задачу. Нами применялись s-стадийные(8-12 степени) неявные методы Рунге-Кутты. Как оказалось, наиболее эффективными были методы 10-12 степени, при этом RTol и ATol – относительные и абсолютные погрешности, брались порядка 1е-12, 1е-13 для достижения необходимой точности приближенного решения.

Список использованной литературы

1. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы, т. – 2. – М.: Наука, 1976.
2. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений – М.: Мир, 1999.

3. Мадорский В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений. – Брест.: БрГУ, 2005, 186с.