УДК 517.983+519.6

ОБ АПОСТЕРИОРНОМ ВЫБОРЕ ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ В ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

М.С. Берёзкина, *5 курс*
Научный руководитель – ***В.Ф. Савчук,*** *к.физ.-мат.н., доцент*
БрГУ им. А.С.Пушкина

В действительном гильбертовом пространстве H решается уравнение I рода

$$A x = y \tag{1}$$

с ограниченным несамосопряжённым оператором A, для которого нуль принадлежит спектру, но не является собственным значением оператора. Используем итеративный метод

$$x_{n+1} = \left(A^{*}A + B\right)^{-1}\left(Bx_n + A^{*}y\right),\ x_0 \in H. \tag{2}$$

Здесь B – ограниченный вспомогательный самосопряжённый оператор, который выбирается для улучшения обусловленности, $B = bE, b > 0, E$ – тождественный оператор. Этот метод совпадает с методом

$$x_{n+1} = \left(A^2 + B\right)^{-1}\left(Bx_n + Ay\right), x_0 = 0 \quad (3)$$

при самосопряжённом операторе A. При приближённой правой части $y_\delta, \|y - y_\delta\| \le \delta,$ метод (1) примет вид

$$z_{n+1} = \left(A^*A + B\right)^{-1}\left(Bz_n + A^*y_\delta\right) + \left(A^*A + B\right)^{-1}u_n, z_0 \in H. \quad (4)$$

Здесь u_n - ошибки вычисления итерации, $\|u_n\| \le \beta$. Обозначим $C = \left(A^*A + B\right)^{-1}$.

Метод (4) примет вид

$$z_{n+1} = C\left(Bz_n + A^*y_\delta\right) + Cu_n, z_0 \in H. \quad (5)$$

Для метода (2) был рассмотрен априорный выбор числа итераций: доказана сходимость метода в исходной норме гильбертова пространства и получены оценки погрешности при точной и приближённой правой части уравнения. Для их получения потребовалось предположение, что точное решение уравнения (1) истокопредставимо. Если нет сведений об истокопредставимости точного решения, то затруднительно получить оценку погрешности и априорный момент останова. И тем не менее метод можно сделать эффективным, если воспользоваться правилом останова по соседним приближениям.

Определим момент останова итерационной процедуры условием:

$\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, \ (n < m); \ \|z_m - z_{m+1}\| \le \varepsilon.$

Справедливы

Лемма 1. Пусть приближение ω_n определяется равенствами

$$\omega_0 = z_0, \ \omega_{n+1} = CB\omega_n + CA^*y + Cu_n, \ \ n \ge 0, \quad (6)$$

тогда справедливы неравенства

$$\sum_{k=0}^{n}\|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2.$$

Лемма 2. При любом $\omega_0 \in H$ и произвольной последовательности ошибок $\{u_n\}$, удовлетворяющих условию $\|u_n\| \le \beta$, выполняется неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty}\|\omega_n - \omega_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta. \quad (7)$$

Обе леммы были использованы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема. Пусть уровень останова $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ выбирается как функция от уровней δ и β норм погрешностей $y - y_\delta$ и u_n. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$, то момент останова m определён при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых y_δ и u_n, удовлетворяющих условиям $\|y - y_\delta\| \le \delta, \ \|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta, \beta) > \delta\|CA^*\| + 2\|C\|\beta$, то справедлива оценка

$$m < \frac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \|CA^*\|\delta - 2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon - \|CA^*\|\delta\right)};$$

в) если кроме того, $\varepsilon(\varepsilon, \beta) \to 0, \ \ \delta, \beta \to 0,$ и $\varepsilon(\delta, \beta) \ge k\left(\|CA^*\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, где $k > 1$, $p \in (0,1)$, то $\lim\limits_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\|z_m - x\| = 0$.

В теореме обоснована возможность применения правила останова по соседним приближениям и получена оценка для момента останова. Показано, что приближённое решение метода *zm*, полученное с использованием правила останова по соседним приближениям, сходится к точному решению x уравнения (1).

Список использованных источников

1. Савчук, В.Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик. – Брест: Изд-во БрГУ, 2008. – 196 с.