УДК 513.82

ПОСТРОЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО РЕПЕРА КРИВОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО С ПСЕВДОЕВКЛИДОВОЙ КАСАТЕЛЬНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ

Е.В. Букраба, *5 курс*
Научный руководитель – ***А.А. Юдов,*** *к.ф.-м.н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

Пространством Минковского называется четырехмерное псевдоевклидово пространство индекса 1. Герман Минковский предложил данное пространство в 1908 голу в качестве геометрической интерпретации пространства-времени специальной теории относительности.

Рассмотрим вопрос о построении каноническою репера кривой в пространстве Минковского с псевдоевклидовой касательной плоскостью и выведем деривационные формулы. В пространстве ${}^1R_4$ выберем базис $R=\{0,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\}$, где

$$\vec{e}_1^{\,2}=-1,\vec{e}_2^{\,2}=\vec{e}_3^{\,2}=\vec{e}_4^{\,2}=1,\left(e_i,e_j\right)=0,i\neq j.$$

Точка $M\in{}^1R_4$, имеющая в репере R координаты (x_1, x_2, x_3, x_4): $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Определение 1.1. <u>*Кривой в пространстве*</u> ${}^1R_4$ *называется множество точек этого пространства, координаты которых задаются уравнениями:*

$$\gamma: x_1=x_1(t);\ x_2=x_2(t);\ x_3=x_3(t);\ x_4=x_4(t). \qquad (1)$$

Или в векторном виде

$$\vec{r}=\overrightarrow{r(t)}. \qquad (2)$$

Пусть кривая γ является кривой класса C^3. Рассмотрим на дифференцируемой кривой γ вектора:

$$\vec{r}'(x_1';x_2';x_3';x_4'),\vec{r}''(x_1'';x_2'';x_3'';x_4''),\vec{r}'''(x_1''';x_2''';x_3''';x_4''').$$

Определение 1.2. *Точка М, принадлежащая кривой γ, называется <u>неособой</u>, если в этой точке вектора $\vec{r}'$, $\vec{r}''$, $\vec{r}'''$ линейно независимы. В противном случае точка М кривой γ называется особой.*

Определение 1.3. *Прямая $\Sigma_1 = [M, \vec{r}']$ называется <u>касательной к кривой в точке М</u>, 2-плоскость $\Sigma_2 = [M, \vec{r}', \vec{r}'']$ называется соприкасающейся плоскостью кривой γ, 3-плоскость $\Sigma_3 = [M, \vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''']$ называется соприкасающейся 3-плоскостью кривой γ в точке М.*

Определение 1.4. *<u>Соприкасающийся флаг</u> - это совокупность, состоящая из точки кривой, касательной к кривой в этой точке, соприкасающейся 2-плоскости к кривой в этой точке и соприкасающейся 3-плоскости к кривой в этой точке.* $[M, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3], M \subset \Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \Sigma_3$.

Рассмотрим кривую γ с соприкасающимся флагом $\{M^1, R_1, {}^1R_2, {}^1R_3\}$

Построим в произвольной точке M кривой γ канонический репер $\{M, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$.

Введём на кривой γ естественную параметризацию s следующим образом: $s = i\int\limits_{t_0}^{t} \left|\vec{r}_t'\right| dt$.

В нашем случае векторы $\vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}, \vec{\varepsilon_4}$ - векторы действительной длины, а вектор $\vec{\varepsilon_1}$ – век-тор мнимой длины.

Пусть кривая γ задана в естественной параметризации. Вектора $\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}, \vec{\varepsilon_4}$ канонического репера будут заданы тоже с помощью параметра s.

Рассмотрим векторы $\dot{\vec{\varepsilon}}_1, \dot{\vec{\varepsilon}}_2, \dot{\vec{\varepsilon}}_3, \dot{\vec{\varepsilon}}_4$ Эти векторы можно будет разложить по базису $\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}, \vec{\varepsilon_4}$:

$$\begin{cases} \dot{\vec{\varepsilon}}_1 = a_{11}\vec{\varepsilon}_1 + a_{12}\vec{\varepsilon}_2 + a_{13}\vec{\varepsilon}_3 + a_{14}\vec{\varepsilon}_4 \\ \dot{\vec{\varepsilon}}_2 = a_{21}\vec{\varepsilon}_1 + a_{22}\vec{\varepsilon}_2 + a_{23}\vec{\varepsilon}_3 + a_{24}\vec{\varepsilon}_4 \\ \dot{\vec{\varepsilon}}_3 = a_{31}\vec{\varepsilon}_1 + a_{32}\vec{\varepsilon}_2 + a_{33}\vec{\varepsilon}_3 + a_{34}\vec{\varepsilon}_4 \\ \dot{\vec{\varepsilon}}_4 = a_{41}\vec{\varepsilon}_1 + a_{42}\vec{\varepsilon}_2 + a_{43}\vec{\varepsilon}_3 + a_{44}\vec{\varepsilon}_4 \end{cases} \qquad (4)$$

Теорема. *Производная вектора постоянной длины перпендикулярна этому вектору.*

Из теоремы следует, что $\dot{\vec{\varepsilon}}_1 \perp \vec{\varepsilon}_1$.

Домножим первое уравнение (4) скалярно на $\vec{\varepsilon}_1$. Получим $a_{11} = 0$. Аналогично, $a_{22} = a_{33} = a_{44} = 0$.

Домножим первое уравнение (4) скалярно на $\vec{\varepsilon}_2$, второе на $\vec{\varepsilon}_1$, затем сложим их. $(\vec{\varepsilon}_2, \dot{\vec{\varepsilon}}_1) + (\dot{\vec{\varepsilon}}_2, \vec{\varepsilon}_1) = a_{12} + a_{21}$. Выражение $\dot{\overline{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}} = 0$. Отсюда, $a_{12} = a_{21}$. Аналогично, $a_{13} = a_{31}, a_{14} = a_{41}, a_{24} = -a_{42}, a_{34} = -a_{43}, a_{23} = -a_{32}$.

Выберем $\vec{\varepsilon}_1 = \dot{\vec{r}}$, $\vec{\varepsilon}_2 = \dfrac{\ddot{\vec{r}}}{\left|\ddot{\vec{r}}\right|}$. При этом $\vec{\varepsilon_2}$ имеет действительную длину. Тогда

$$\dot{\vec{\varepsilon}}_1 = \ddot{\vec{r}} = \left|\ddot{\vec{r}}\right| \vec{\varepsilon}_2. \qquad (5)$$

Исходя из (4) и (5), получим $a_{13} = a_{14} = 0$. Следовательно, $a_{31} = a_{41} = 0$.

$\dot{\vec{\varepsilon}}_2 = \dfrac{1}{\left|\ddot{\vec{r}}\right|}\ddot{\vec{r}} + \dddot{\vec{r}}\dfrac{1}{\left|\ddot{\vec{r}}\right|}$. Значит, $\dot{\vec{\varepsilon}}_2$ раскладывается по векторам $\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}$, задающим Σ_3. Значит, $a_{24} = 0$, а, следовательно, $a_{42} = 0$. $\vec{r_s'} = \vec{\varepsilon_1}$. Пусть $\left|\ddot{\vec{r}}\right| = k_1(s)$, $a_{23} = k_2(s)$, $a_{34} = k_3(s)$.

Деривационные формулы запишутся в виде:

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \overrightarrow{\varepsilon_1}, \\ \dot{\vec{\varepsilon}}_1 = k_1(s)\overrightarrow{\varepsilon_2}, \\ \dot{\vec{\varepsilon}}_2 = k_1(s)\overrightarrow{\varepsilon_1} + k_2(s)\overrightarrow{\varepsilon_3}, \\ \dot{\vec{\varepsilon}}_3 = -k_2(s)\overrightarrow{\varepsilon_2} + k_3(s)\overrightarrow{\varepsilon_4}, \\ \dot{\vec{\varepsilon}}_4 = -k_3(s)\overrightarrow{\varepsilon_3}. \end{cases}$$