УДК 330(075)

# О МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИЧЕСКОЙ КОНКУРЕНЦИИ КУРНО

*С.А.* ***Голубцов****, 2 курс*
*Научный руководитель –* ***И.Н. Климашевская****, к. физ.-мат. н., доцент*
*Брестский государственный университет им.А.С.Пушкина*

В современном мире, в условиях жестокой конкуренции, многие сталкиваются с проблемой развития производства. Для упрощения этого выбора, в 1838 году была предложена модель олигополической конкуренции Курно, основанная на теореме равновесия Нэша, давшая возможность рассчитать оптимальную стратегию развития. Рассмотрим эту модель подробнее. Пусть $N = \{1, \ldots, n\}$- множество производителей, X- набор товаров, P(X)-обратная функция спроса, которая показывает, по какой цене производители согласны купить набор товаров X. P(X) удовлетворяет условию:

A1 $P(X) \in C^2, P'(X) < 0, P(0) > 0, \exists M > 0 \; P(M) = 0, M -$ объём насыщения.

Производитель описывается функцией издержек $c_i(X)$ которая удовлетворяет условию:

A2 $\forall i \in N \; c_i(x) \in C^2 \; \frac{dc_i(x)}{dx} > 0, \frac{d^2c_i(x)}{dx^2} \geq 0 -$ выпуклость $c_i$.

Основная идея в том, что чем больше товаров мы берем, тем меньше платим. Опишем поведение i-го производителя:

$$x_i - \text{выпуск } i\text{-го производителя}, x_i \in [0, M]. X = \sum_{j=1}^{n} x_j - \text{суммарный выпуск}.$$

Выбор стратегии определяет прибыль производителя:

$$u_i(\overline{x}) = P\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) x_i - c_i(x_i) - \text{ прибыль } i - \text{го производителя (его целевая функция)}.$$

Можно заметить, что на прибыль влияет суммарный выпуск. Получили игру в нормальной форме. Компромиссом является равновесие по Нэшу.

Теорема:

Пусть выполнены условия A1 и A2 и кроме того, будем считать, что функция P(X)X является выпуклой. Тогда в модели Курно существует единственное равновесие по Нэшу. P.S. Если P(X) вогнута, то и P(X)X вогнута (P"(X)≤0), (P(X)X)"=P"(X)X + 2P'(X) =>P"(X)X≤0.

Доказательство. Существование: [O, M] - множество стратегий i-го игрока - выпуклый компакт (1-ое условие теоремы Нэша). $u_i(\bar{x})$ - непрерывная функция по совокупности переменных $(x_1, \dots, x_n)$ (2-ое условие теоремы Нэша). Покажем, что $u_i(x_i, \bar{x}_{-i})$ вогнута по $x_i$, при условии, что стратегии всех остальных игроков фиксированы.Так как существует вторая производная, то надо показать, что она неположительна:

$$\frac{d^2 u_i(x_i, \bar{x}_{-i})}{dx^2} = P''\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)x_i + 2P'\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) - \frac{d^2 c_i(x_i)}{dx^2};\ \frac{d^2 c_i(x_i)}{dx^2} \geq 0$$

Достаточно доказать что:

$$P''\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)x_i + 2P'\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) \leq 0. \qquad (1)$$

Если $P''\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) \leq 0$, то (1) очевидно, иначе можно сделать следующую оценку:

$$P''\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)x_i + 2P'\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) \leq P''\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\sum_{j=1}^{n} x_j + 2P'\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) \leq \{P(X)X - \text{вогнута}\} \leq 0$$

$\Longrightarrow$по теореме Нэша существует равновесие по Нэшу в модели Курно.

Единственность: Пусть есть еще одно равновесие по Нэшу $(x_1^*, \dots, x_n^*)$.

Суммарный выпуск $G = \sum_{j=1}^{n} x_j^*$. Мы знаем, что $c_i(x_i^*, \bar{x}_{-i}^*) = \max\left\{P\left(x_i + \sum_{j \neq i}^{n} x_j^*\right)x_i - c_i(x_i)\right\}$.

Без ограничения общности можно считать, что M = ∞. Производная функции в точке максимума=0: $P'(G)x_i^* + P(G) - \frac{dc_i(x_i^*)}{dx_i} = 0$, если $x_i^* > 0$, $P'(G)x_i^* + P(G) - \frac{dc_i(x_i^*)}{dx_i} 0$, если $x_i^* = 0$.

Задача дополнительности для i–го производителя:

$$\begin{cases} P'(G)x_i + P(G) - \dfrac{dc_i(x_i)}{dx_i} \leq 0, \\ x_i\left[P'(G)x_i + P(G) - \dfrac{dc_i(x_i)}{dx_i}\right] = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

В первом неравенстве для i-го производителя его оптимальное решение является решением задачи дополнительности($\forall i$). Как устроено решение этой задачи? Есть два варианта: или агент ничего не выпускает или он выпускает ровно столько, что выполняются все условия.

Решение (2) определяет функцию $x_i$(G) - однозначно, т.е. она единственна. При нашем предположении о том, что $P'(G) < 0$ и $\frac{dc_i(x_i)}{dx_i} > 0 \Longrightarrow P'(G)x_i + P(G) - \frac{dc_i(x_i)}{dx_i}$ -монотонно убывает по $x_i$, при G фиксированном, причем в пределе при $x \to \infty$ функция стремится к $-\infty$. Так как $P'(G)x_i + P(G) - \frac{dc_i(x_i)}{dx_i}$ монотонно убывает, то возможны два варианта: или $x_i(G) = 0$или $\exists x_i(G) : P'(G)x_i + P(G) - \frac{dc_i(x_i)}{dx_i} = 0$ (*).

Обозначим: $I(G) = \{i | x_i(G) > 0\}$- те фирмы, которые что-то выпускают. Продифференцируем (*):

$$P''(G)x_i(G) + P'(G)\frac{dx_i(G)}{dG} + P'(G) - \frac{d^2 c_i}{dx^2}\frac{dx_i(G)}{dG} = 0 \Longrightarrow \frac{dx_i(G)}{dG} = \frac{P''(G)x_i(G) + P'(G)}{\frac{d^2 c_i}{dx^2} \quad P'(G)}.$$

Видно, что знаменатель никогда не обращается в ноль. Введем еще два обозначения:

$$I_+(G) = \left\{ i \in I(G) \,\middle|\, \frac{dx_i(G)}{dG} > 0 \right\}, I_-(G) = \left\{ i \in I(G) \,\middle|\, \frac{dx_i(G)}{dG} \le 0 \right\},$$

$I_+(G)$ $(I_-(G))$ - агенты которые при увеличении G ведут себя агрессивно (пассивно). Если $i \in I_+(G)$, то $0 \le \frac{dx_i(G)}{dG} \le -1 - x_i(G)\frac{P''(G)}{P'(G)}$ иначе $-1 - x_i(G)\frac{P''(G)}{P'(G)} \le \frac{dx_i(G)}{dG} \le 0$, $P(G)G$- вогнута

$\Longrightarrow$ $P''(G)G + 2P'(G) < 0$, $-\frac{P''(G)}{P'(G)} > \frac{2}{G}$, $i \in I_+(G)$ $\Longrightarrow$ $x_i(G) > \frac{G}{2}$ $\Longrightarrow$ $|I_+(G)| < 1$.

Хотим доказать, что $G - \sum_{i=0}^{n} x_i(G) = 0$. Просуммируем по $I(G)$:

$$1 - \sum_{i \in I(G)} \frac{dx_i(G)}{dG} \ge 1 - \sum_{i \in I_+(G)} \frac{dx_i(G)}{dG}.$$

$$1.\ |I_+(G)| = 0, \frac{d}{dG}\left[G - \sum_{i=1}^{n} x_i(G)\right] > 0$$

$$2.\ |I_+(G)| = 0, 1 - \sum_{i \in I_+(G)} \frac{dx_i(G)}{dG} \ge 2 - x_i(G)\frac{P''(G)}{P'(G)} \ge 0$$

$\Longrightarrow$решение модели Курно единственно.