УДК 519.6 + 517.983.54

# МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ НЕЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Н.И. Луцык, 5 курс*
*Научный руководитель – **О.В. Матысик**, к.ф.-м.н., доцент*
*Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина*

**1. Постановка задачи.** В действительном гильбертовом пространстве $H$ исследуется операторное уравнение I рода

$$Ax = y, \qquad (1)$$

где $A$ – положительный ограниченный и самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением, однако принадлежит спектру оператора $A$, и, следовательно, задача некорректна. Пусть $y \in R(A)$, т.е. при точной правой части $y$ уравнение (1) имеет единственное решение $x$. Для отыскания этого решения применяется неявная итерационная процедура

$$\left(E+\alpha^2A^2\right)x_n = (E-\alpha A)^2 x_{n-1} + 2\alpha y,\ \ x_0 = 0. \qquad (2)$$

Обычно правая часть уравнения известна с некоторой точностью $\delta$, т.е. известен $y_\delta$, для которого $\|y-y_\delta\| \le \delta$. Поэтому вместо схемы (2) приходится рассматривать приближения

$$\left(E+\alpha^2A^2\right)x_{n,\delta} = (E-\alpha A)^2 x_{n-1,\delta} + 2\alpha y_\delta,\ \ x_{0,\delta} = 0. \qquad (3)$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения при достаточно малых $\delta$ и $n\delta$ и достаточно больших $n$.

**2. Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций.**

**2.1. Сходимость при точной правой части уравнения.** Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора $A$ и формулой (2), по индукции получим $x - x_n = \int\limits_0^M \lambda^{-1}\left[\frac{(1-\alpha\lambda)^2}{1+\alpha^2\lambda^2}\right]^n dE_\lambda y$, где $M = \|A\|$, $E_\lambda$ – спектральная функция оператора $A$. Разобьем полученный интеграл на два: $x - x_n = \int\limits_0^\varepsilon \lambda^{-1}\left[\frac{(1-\alpha\lambda)^2}{1+\alpha^2\lambda^2}\right]^n dE_\lambda y + \int\limits_\varepsilon^M \lambda^{-1}\left[\frac{(1-\alpha\lambda)^2}{1+\alpha^2\lambda^2}\right]^n dE_\lambda y.$

Потребуем, чтобы при $\lambda \in (0, M]$ величина $\frac{(1-\alpha\lambda)^2}{1+\alpha^2\lambda^2}$ была меньше 1. Это будет при $\alpha > 0$. Рассмотрим второй из написанных интегралов по норме: при $\alpha > 0$ имеем $\left\|\int\limits_\varepsilon^M \lambda^{-1}\left[\frac{(1-\alpha\lambda)^2}{1+\alpha^2\lambda^2}\right]^n dE_\lambda y\right\| \le q^n(\varepsilon)\left\|\int\limits_\varepsilon^M \lambda^{-1}\, dE_\lambda y\right\| \le q^n(\varepsilon)\|x\| \to 0,\ n\to\infty$ (здесь $\frac{(1-\alpha\lambda)^2}{1+\alpha^2\lambda^2} \le q(\varepsilon) < 1$). Кроме этого, $\left\|\int\limits_0^\varepsilon \lambda^{-1}\left[\frac{(1-\alpha\lambda)^2}{1+\alpha^2\lambda^2}\right]^n dE_\lambda y\right\| \le \left\|\int\limits_0^\varepsilon \lambda^{-1}\, dE_\lambda y\right\| = \left\|\int\limits_0^\varepsilon dE_\lambda x\right\| = \|E_\varepsilon x\| \to 0,\ \varepsilon \to 0$, так как $E_\varepsilon$ сильно стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ в силу свойств спектральной функции. Следовательно, при $\alpha > 0$ имеем $\|x - x_n\| \to 0,\ n \to \infty$.

Тем самым доказана сходимость метода (2) к точному решению операторного уравнения (1) при точной правой части $y$.

**2.2. Сходимость при приближенной правой части уравнения.** Итерационный процесс (3) является сходящимся, если нужным образом выбирать число итераций $n$ в зависимости от уровня погрешности $\delta$. Справедлива

**Теорема.** *Итеративный процесс* (3) *сходится при* $\alpha > 0$, *если выбирать число итераций n в зависимости от* $\delta$ *так, чтобы* $n\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$.

Доказательство. Рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. По доказанному в подразделе 2.1 $x - x_n \to 0$, $n \to \infty$. Убедимся, что $x_n - x_{n,\delta}$ можно сделать сходящимся к нулю. Имеем

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{2n}\left(E + \alpha^2 A^2\right)^{-n}\right](y - y_\delta) = \int_0^M \lambda^{-1}\left[1 - \frac{(1-\alpha\lambda)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^2\right)^n}\right] dE_\lambda (y - y_\delta).$$

По индукции нетрудно показать, что $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \frac{(1-\alpha\lambda)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^2\right)^n}\right] \le 2n\alpha$. Тогда справедлива оценка $\|x_n - x_{n,\delta}\| \le 2n\alpha\delta$. Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + 2n\alpha\delta$ и, как показано в подразделе 2.1 $\|x - x_n\| \to 0$, $n \to \infty$, то для сходимости метода (3) достаточно, чтобы $n\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$. Теорема доказана.

**2.3. Оценка погрешности.** Оценить скорость сходимости приближений (3) без дополнительных предположений невозможно, так как неизвестна и может быть сколь угодно малой скорость убывания к нулю $\|x - x_n\|$. Поэтому для оценки скорости сходимости метода будем использовать дополнительную априорную информацию на гладкость точного решения $x$ уравнения (1) – возможность его истокообразного представления, т.е. что $x = A^s z$, $s > 0$. Тогда имеем $y = A^{s+1} z$ и, следовательно, получим $x - x_n = \int_0^M \lambda^s \left[\frac{(1-\alpha\lambda)^2}{1+\alpha^2\lambda^2}\right]^n dE_\lambda z$. Для оценки $\|x - x_n\|$ найдем максимум модуля подынтегральной функции $\varphi(\lambda) = \lambda^s \left[\frac{(1-\alpha\lambda)^2}{1+\alpha^2\lambda^2}\right]^n$, для которой, в свою очередь, справедливо $\varphi(\lambda) \le \lambda^s (1-\alpha\lambda)^{2n}$. Нетрудно показать, что при условии $\alpha > 0$ для достаточно больших $n$ справедлива оценка $\max\limits_{[0,M]} \varphi(\lambda) \le s^s (2n\alpha e)^{-s}$ и, следовательно, $\|x - x_n\| \le s^s (2n\alpha e)^{-s} \|z\|$. Таким образом, общая оценка погрешности итерационной процедуры (3) запишется в виде $\|x - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \le s^s (2n\alpha e)^{-s}\|z\| + 2n\alpha\delta$. Для минимизации полученной оценки погрешности вычислим правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим оценку $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le (1+s) e^{-s/(s+1)} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}$ и $n_{\text{опт}} = s(2\alpha)^{-1} e^{-s/(s+1)} \delta^{-1/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}$.

Очевидно, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра $\alpha$, но от него зависит $n_{\text{опт}}$. Поэтому для уменьшения $n_{\text{опт}}$ и, значит, объема вычислительной работы, следует брать $\alpha$ по возможности большим, удовлетворяющим условию $\alpha > 0$ и так, чтобы $n_{\text{опт}} \in N$.

Предложенный метод может быть успешно применён для решения некорректных задач, встречающихся в технике, гравиметрии, спектроскопии, математической экономике.