УДК 519.6 + 517.983.54

АЛГОРИТМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

***Ю.В. Лялюк**, 5 курс*
*Научный руководитель – **О.В. Матысик**, к.ф.-м.н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

В работе рассматривается операторное уравнение I рода

$$Ax = y \qquad (1)$$

с действующим в гильбертовом пространстве H ограниченным положительным самосопряженным оператором $A : H \to H$, в предположении, что нуль принадлежит спектру этого оператора, однако, вообще говоря, не является его собственным значением. При сделанных предположениях задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если решение уравнения (1) все же существует, то для его отыскания предлагается регуляризатор в виде явной двухшаговой итерационной процедуры

$$x_n = 2(E-\alpha A)x_{n-1} - (E-\alpha A)^2 x_{n-2} + \alpha^2 Ay,\ \ x_0 = x_1 = 0. \qquad (2)$$

Обычно правая часть уравнения (1) известна с некоторой точностью δ, т.е. известен y_δ, для которого $\|y-y_\delta\| \le \delta$. Поэтому вместо схемы (2) приходится рассматривать приближения

$$x_{n,\delta} = 2(E-\alpha A)x_{n-1,\delta} - (E-\alpha A)^2 x_{n-2,\delta} + \alpha^2 Ay_\delta,\ x_{0,\delta} = x_{1,\delta} = 0. \qquad (3)$$

Ниже, под сходимостью процедуры (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ. Иными словами, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_n \|x-x_{n,\delta}\|\right) = 0$.

Изучим сходимость итерационной процедуры (3) в случае единственного решения в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax,x)}$, $x \in H$. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем, что $x_{0,\delta} = x_{1,\delta} = 0$ и рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x-x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$.

По индукции нетрудно показать, что $x_n = A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^n - n\alpha A(E-\alpha A)^{n-1}\right]y$. Тогда

$$x - x_n = A^{-1}y - A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^n - n\alpha A(E-\alpha A)^{n-1}\right]y = (E-\alpha A)^{n-1}[E+(n-1)\alpha A]x.$$

Разность $x - x_n$ бесконечно мала в норме пространства H при $n \to \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для ее оценки необходима дополнительная информация на гладкость точного решения x – его истокообразная представимость, т.е. что $x = A^s z,\ s > 0$. При использовании энергетической нормы нам это дополнительное предположение не потребуется. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора A имеем $\|x-x_n\|_A^{\,2} = (A(x-x_n), x-x_n) =$ $= \left(A(E-\alpha A)^{2n-2}[E+(n-1)\alpha A]^2 x, x\right) = \int\limits_0^M \lambda(1-\alpha\lambda)^{2n-2}[1+(n-1)\alpha\lambda]^2\, d(E_\lambda x, x)$, где $M = \|A\|$, E_λ – соответствующая спектральная функция, E – единичный оператор. Нетрудно показать, что при $\alpha \in (0,\ 5/(4M)]$ выполняется $\|x-x_n\|_A \le (e+1)^{1/2}(e+4)^{1/2}e^{-3/2}[(n-1)\alpha]^{-1/2}\|x\|$.

Оценим $x_n - x_{n,\delta}$. Справедливо равенство

$$x_n - x_{n,\delta} = \int\limits_0^M \lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1}\right] dE_\lambda(y-y_\delta).$$

Тогда $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int\limits_0^M \lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1}\right]^2 d(E_\lambda(y-y_\delta), y-y_\delta)$.

Обозначим через $\xi_n(\lambda)$ подынтегральную функцию и оценим ее сверху при условии $\alpha \in (0,\ 5/(4M)]$. Сначала методом математической индукции можно доказать, что $\left|\lambda^{-1}[1-(1-\alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1}]\right| \le \frac{5}{4}(n-1)\alpha$ при $\alpha\lambda \in (0,\ 5/4]$, $n \ge 1$. Поэтому

$$\xi_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1}\right]^2 =$$
$$= \left|\lambda^{-1}[1-(1-\alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1}]\right| \left|1-(1-\alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1}\right| \le$$
$$\le \frac{5}{4}(n-1)\alpha\left(1+\left|(1-\alpha\lambda)^n\right| + \left|n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1}\right|\right) \le \frac{15}{4}(n-1)\alpha,$$

так как при условии $\alpha \in (0,\ 5/(4M)]$ справедливо $|1-\alpha\lambda| < 1$ и $\left|n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1}\right| < 1$. Итак, для любых $n \geq 1$ $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^{\ 2} \leq \frac{15}{4}(n-1)\alpha\delta^2$, поэтому $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq 15^{1/2} \cdot 2^{-1}(n-1)^{1/2}\alpha^{1/2}\delta,\ n \geq 1$. Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + 15^{1/2} \cdot 2^{-1}(n-1)^{1/2}\alpha^{1/2}\delta,\ n \geq 1$ и при $n \to \infty$ $\|x - x_n\|_A \to 0$, то для сходимости $\|x - x_{n,\delta}\|_A \to 0,\ n \to \infty$, достаточно, чтобы $\sqrt{n-1}\,\delta \to 0$, $n \to \infty,\ \delta \to 0$. Таким образом, если в процедуре (3) выбрать число итераций $n = n(\delta)$, зависящих от δ так, чтобы $\sqrt{n-1}\,\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$, то получим регуляризующий алгоритм, обеспечивающий сходимость к точному решению уравнения (1) в энергетической норме гильбертова пространства. Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3)

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq (e+1)^{1/2}(e+4)^{1/2}e^{-3/2}\left[(n-1)\alpha\right]^{-1/2}\|x\| + 15^{1/2} \cdot 2^{-1}(n-1)^{1/2}\alpha^{1/2}\delta,\ n \geq 1. \quad (4)$$

При заданном δ найдем такое значение числа итераций n, при котором оценка (4) становится минимальной; в результате получим $\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leq 2^{1/2} \cdot 15^{1/4}(e+1)^{1/4} \times$ $\times (e+4)^{1/4}e^{-3/4}\delta^{1/2}\|x\|^{1/2}$ и $n_{\text{опт}} = 1 + 2 \cdot 15^{-1/2}(\alpha\delta)^{-1}(e+1)^{1/2}(e+4)^{1/2}e^{-3/2}\|x\|$.

Очевидно, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α. Но $n_{\text{опт}}$ зависит от α, поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать α возможно большим, удовлетворяющим условию $\alpha \in (0,\ 5/(4M)]$, и так, чтобы $n_{\text{опт}} \in N$.

Важен вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H. Эти условия дает

Т е о р е м а. *Если выполнены условия:* 1) $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, 2) $E_\varepsilon x = 0$, *где* $E_\varepsilon = \int_0^\varepsilon dE_\lambda$ $(0 < \varepsilon < \|A\|)$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к* x *в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.*

Предложенный метод может быть применён для решения некорректных задач, встречающихся в технике, системах полной автоматической обработки экспериментов, математической экономике.