УДК 519.24

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРВОГО МОМЕНТА СГЛАЖЕННОЙ ОЦЕНКИ ВЗАИМНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

А.Ю. Марчук, *5 курс*
Научный руководитель – ***Е.И. Мирская****, к. физ.-мат. н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

Спектральный анализ временных рядов является одним из основных направлений в исследованиях ученых многих стран мира, причем особое внимание уделяется методам спектрального анализа стационарных случайных процессов. В анализе временных рядов одной из главных проблем является построение оценок спектральных плотностей и исследование их статистических свойств.

Рассмотрим действительный стационарный случайный процесс $X(t)=\{X_a(t), a=\overline{1,r}\}$, $t\in Z$, с $MX(t)=0$, неизвестной взаимной спектральной плотностью $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda\in \Pi=[-\pi,\pi]$, $a,b=\overline{1,r}$.

Пусть $X_a(0), X_a(1),\ldots,X_a(T-1)$ – T последовательных наблюдений, полученных через равные промежутки, за составляющей $X_a(t)$ процесса $X(t)$, $t\in Z$, $a=\overline{1,r}$.

Предполагаем, что число наблюдений T представимо в виде $T=LN-(L-1)K$, где L число пересекающихся интервалов, содержащих по N наблюдений, а K принимает целочисленные значения, $0\le K\le N$.

Используя методику Бриллинджера Д. [1], в качестве оценки взаимной спектральной плотности исследована статистика вида

$$\tilde{f}_{ab}(\lambda)=\frac{2\pi}{T}\sum_{s=1}^{T}W_{ab}\left(\lambda-\frac{2\pi s}{T}\right)\hat{f}_{ab}^{(T)}\left(\frac{2\pi s}{T}\right), \tag{1}$$

где $W_{ab}(x)$, $x\in R$ – спектральное окно, а $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$, $\lambda\in \Pi$ – оценка взаимной спектральной плотности процесса $X(t)$, $t\in Z$, построенная по методу Уэлча

$$\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)=\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\frac{1}{2\pi\sum_{p=0}^{N-1}h_a^N(p)h_b^N(p)}H_a(\lambda,l)\overline{H_b(\lambda,l)}, \tag{2}$$

где $H_a(\lambda,l)$ задано выражением

$$H_a(\lambda,l)=\sum_{p=0}^{N-1}h_a^N(p)X_a(p+(l-1)(N-K))e^{-i\lambda(p+(l-1)(N-K))}, \qquad (3)$$

$l=\overline{1,L},\ \ a=\overline{1,r},\ \ \lambda\in\Pi$, причем наблюдения сглаживаются одним и тем же окном просмотра данных $h_a^N(t),\ \ t\in Z$.

В данной работе исследована скорость сходимости математического ожидания оценки $\widetilde{f}_{ab}(\lambda)$, предполагая, что $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, удовлетворяет условию

$$|f_{ab}(x+\lambda)-f_{ab}(\lambda)|\le C|x|^{\alpha},\ 0<\alpha\le 1, \qquad (4)$$

для любых $x\in\Pi$, C – некоторая положительная константа, $a,b=\overline{1,r}$.

Предположение 1. Пусть окна просмотра данных $h_a^N(t),\ \ a=\overline{1,r},\ \ t\in Z$, ограничены единицей и имеют ограниченную постоянной вариацию.

Предположение 2. Пусть $W_{ab}(x)$ непрерывная, периодическая функция с периодом 2π, имеет ограниченную вариацию и является ядром.

Лемма 1. Для ядра $W_{ab}(x)$, $a,b=\overline{1,r},\ \ x\in\Pi$, при любом $\beta>0$

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\Pi}|x|^{\beta}|W_{ab}(x)|dx=0. \qquad (5)$$

Теорема 1. Если взаимная спектральная плотность $f_{ab}(x)$ непрерывна в точке $x=\lambda$ и ограничена на Π, окна просмотра данных $h_a^N(t),\ \ t\in R,\ \ a=\overline{1,r}$ удовлетворяют предположению 1, а спектральные окна предположению 2, то для оценки $\widetilde{f}_{ab}(\lambda),\ \ \lambda\in\Pi$, заданной выражением (1), справедливо соотношение

$$\lim_{T\to\infty}M\widetilde{f}_{ab}(\lambda)=f_{ab}(\lambda), \qquad (6)$$

$\lambda\in\Pi,\ \ a,b=\overline{1,r}$.

Теорема 2. Если взаимная спектральная плотность $f_{ab}(x)$, $x\in\Pi$, $a,b=\overline{1,r}$, удовлетворяет соотношению (4), то для математического ожидания оценки $\widetilde{f}_{ab}(\lambda),\ \ \lambda\in\Pi$, $a,b=\overline{1,r}$, задаваемой (1), имеет место равенство

$$\left|M\widetilde{f}_{ab}(\lambda)-f_{ab}(\lambda)\right|=O\left(\int_{\Pi}|z|^{\alpha}|\Phi_{ab}(z)|dz\right)+O\left(\int_{\Pi}|y|^{\alpha}|W_{ab}(y)|dy\right)+O\left(\frac{1}{T}\right),$$

где $0<\alpha\le 1$, а $\Phi_{ab}(x)$ – ядро.

Доказательство. Учитывая, что математическое ожидание оценки $\widetilde{f}_{ab}(\lambda)$ имеет вид

$$M\widetilde{f}_{ab}(x)=\iint_{\Pi^2}W_{ab}(\lambda-v)\Phi_{ab}(x-v)f_{ab}(x)dxdv+O\left(\frac{1}{T}\right),$$

используя соотношения (4) и (5), получим требуемый результат. Теорема доказана.

Таким образом, показано, что оценка (1) является асимптотически несмещенной оценкой взаимной спектральной плотности. Она может быть использована при обработке данных в больших объемах, а также в режиме реального времени.

Список использованных источников

1. Бриллинджер, Д. Временные ряды. Обработка данных и теория. - М.: Мир, 1980. - 536 с.