УДК 519.24

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ПЕРИОДОГРАММЫ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

***Т.Н. Назарчук**, 5 курс*
*Научный руководитель – **Е.И. Мирская**, к. физ.-мат. н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

Рассмотрим действительный стационарный случайный процесс $X(t) = \{X_a(t), a = \overline{1,r}\}$, $t \in Z$, с $MX(t) = 0$, неизвестной взаимной спектральной плотностью $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$, $a, b = \overline{1,r}$.

Пусть $X_a(0), X_a(1), ..., X_a(T-1)$ – T последовательных наблюдений, полученных через равные промежутки, за составляющей $X_a(t)$ процесса $X(t)$, $t \in Z$, $a = \overline{1,r}$.

Предполагаем, что число наблюдений T представимо в виде $T = LN - (L-1)K$, где L - число пересекающихся интервалов, содержащих по N наблюдений, а K принимает целочисленные значения, $0 \le K \le N$.

Используя методику Уэлча на l-ом интервале разбиения построим модифицированную периодограмму вида

$$I_{ab}(\lambda,l)=\frac{1}{2\pi\sum_{t=0}^{N-1}h_a^N(t)h_b^N(t)}H_a(\lambda,l)\overline{H_b(\lambda,l)},$$

(1)

где $H_a(\lambda,l)$ задано выражением

$$H_a(\lambda,l)=\sum_{t=0}^{N-1}h_a^N(t)X_a(t+(l-1)(N-K))e^{-i\lambda(t+(l-1)(N-K))}, \qquad (2)$$

$l=\overline{1,L}$, $a,b=\overline{1,r}$, $\lambda\in\Pi$, причем наблюдения сглаживаются одним и тем же окном просмотра данных $h_a^N(t)$, $t\in Z$.

Предположение 1. Пусть окна просмотра данных $h_a^N(t)$, $a=\overline{1,r}$, $t\in Z$, ограничены единицей и имеют ограниченную постоянной V вариацию.

В данной работе исследовано асимптотическое поведение математического ожидания модифицированной периодограммы $I_{ab}(\lambda,l)$, а также скорость сходимости математического ожидания, в предположении, что взаимная спектральная плотность $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, удовлетворяет условию

$$\left|f_{ab}(x+\lambda)-f_{ab}(\lambda)\right|\le C|x|^{\alpha},\ 0<\alpha\le 1,$$

(3)

для любых $x\in\Pi$, C - некоторая положительная постоянная, $a,b=\overline{1,r}$.

Теорема 1. Математическое ожидание модифицированной периодограммы $I_{ab}(\lambda,l)$, $\lambda\in\Pi$, $a,b=\overline{1,r}$, задаваемой соотношением (1), имеет вид

$$MI_{ab}(\lambda,l)=\int_{\Pi}f_{ab}(x+\lambda)\Phi_{ab}(x)dx,$$

(4)

где $\Phi_{ab}(x)$ задано выражением

$$\Phi_{ab}(x)=\left[2\pi\sum_{t=0}^{N-1}h_a^N(t)h_b^N(t)\right]^{-1}\varphi_a(x)\overline{\varphi_b(x)}, \qquad (5)$$

$$\varphi_a(x)=\sum_{t=0}^{N-1}h_a^N(t)e^{itx},$$

(6)

$x\in\Pi$, $a,b=\overline{1,r}$.

Доказательство теоремы приведено в работе [1].

Лемма 1. Для функции $\Phi_{ab}(x)$, заданной выражением (5), справедливы соотношения

$$\int_{\Pi}\Phi_{ab}(x)dx=1,$$

(7)

для любого $\delta, 0<\delta\le\pi$,

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\Pi\setminus\{|x|\le\delta\}}\left|\Phi_{ab}(x)\right|dx=0.$$

(8)

Теорема 2. Если взаимная спектральная плотность $f_{ab}(x)$, $a,b=\overline{1,r}$, $x\in\Pi$ непрерывна в точке $x=\lambda$ и ограничена на Π, окна просмотра данных удовлетворяют предположению 1, то для модифицированной периодограммы на l-ом интервале, заданной выражением (1), справедливо соотношение

$$\lim_{N\to\infty}MI_{ab}(\lambda,l)=f_{ab}(\lambda).$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$MI_{ab}(\lambda,l)-f_{ab}(\lambda)=\int_{\Pi}f_{ab}(x+\lambda)\Phi_{ab}(x)dx-f_{ab}(\lambda).$$

Используя соотношение (7), получим

$$\left|MI_{ab}(\lambda,l)-f_{ab}(\lambda)\right|\le\int\limits_{\Pi}\left|\Phi_{ab}(x)\right|\left|f_{ab}(x+\lambda)-f_{ab}(\lambda)\right|dx=$$

$$=\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left|\Phi_{ab}(x)\right|\left|f_{ab}(x+\lambda)-f_{ab}(\lambda)\right|dx+\int\limits_{\delta<|x|\le\pi}\left|\Phi_{ab}(x)\right|\left|f_{ab}(x+\lambda)-f_{ab}(\lambda)\right|dx=I_1+I_2.$$

Рассмотрим каждый из интегралов. Учитывая непрерывность $f_{ab}(x)$ в точке $x=\lambda$, имеем, что для любого $\varepsilon>0$, существует $\delta>0$, так что если $|x|\le\delta$, то $\left|f_{ab}(x+\lambda)-f_{ab}(\lambda)\right|\le\varepsilon$. Тогда получим

$$I_1\le\varepsilon\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left|\Phi_{ab}(x)\right|dx\le\varepsilon.$$

Так как взаимная спектральная плотность ограничена на Π, то, используя (8), получим

$$I_2\le 2\max_x\left|f_{ab}(x)\right|\int\limits_{\delta<|x|\le\pi}\left|\Phi_{ab}(x)\right|dx\xrightarrow[N\to\infty]{}0.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. Если взаимная спектральная плотность $f_{ab}(x)$, $a,b=\overline{1,r}$, $x\in\Pi$ удовлетворяет соотношению (3), то имеет место равенство

$$\left|MI_{ab}(\lambda,l)-f_{ab}(\lambda)\right|=O(\int\limits_{\Pi}|x|^{\alpha}\left|\Phi_{ab}(x)\right|dx),\ \ 0<\alpha\le1,$$

где $\Phi_{ab}(x)$, $x\in\Pi$, задается соотношением (5), $a,b=\overline{1,r}$, $\lambda\in\Pi$.

Доказательство. Используя соотношения (4), (7), (3), можем записать

$$\left|MI_{ab}(\lambda,l)-f_{ab}(\lambda)\right|=\left|\int\limits_{\Pi}\Phi_{ab}(x)f_{ab}(x+\lambda)dx-f_{ab}(\lambda)\int\limits_{\Pi}\Phi_{ab}(x)dx\right|\le$$

$$\le\int\limits_{\Pi}\left|\Phi_{ab}(x)\right|\left|f_{ab}(x+\lambda)-f_{ab}(\lambda)\right|dx\le C\int\limits_{\Pi}|x|^{\alpha}\left|\Phi_{ab}(x)\right|dx.$$

Теорема доказана.

Список использованных источников

1. Mirskaya, E.I. The investigation of the moment of the smoothed spectral densities estimates / E.I Mirskaya, J.V. Vasilenko // Computer Algebra Systems in Teaching and Research: proc. of the 4th International Workshop CASTR’2007, Siedlce, Poland, Jan. 31 – Feb. 3, 2007 / University of Podlasie; Eds.: L. Gadomski [and others]. – Siedlce, 2007. – P. 224 – 228.