УДК 37:004

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

А.П. Худяков, *аспирант*
Научный руководитель – ***В.М. Мадорский,*** *к.физ.-мат. н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

Модификация эрмитовской аппроксимации [1] легко распространяется на случай восстановления функции двух переменных. Пусть задана прямоугольная область $D=\{x,y: a \le x \le b;\ c \le y \le d\}$. В этой области определена некоторая неизвестная функция $f(x,y)$. Построим в D сетку $D_h=\{x_k,y_l: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b;\ c=y_0<y_1<\ldots<y_m=d\}$. Пусть на сетке заданы значения функции $f(x,y)$, которые обозначим через $f_{k,l}=f(x_k,y_l)$.

Сплайн $g(x,y)$, приближающий функцию $f(x,y)$ будем искать в виде:

$$g_{p,q}(x,y)=g_{p,q}^{k,l}(x,y)=\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}a_{i,j}^{k,l}(x-x_{k-1})^i(y-y_{l-1})^j;\quad x_{k-1}\le x\le x_k;\quad y_{l-1}\le y\le y_l. \tag{1}$$

Т.е. на каждом прямоугольнике $x_{k-1}\le x\le x_k;\ \ y_{l-1}\le y\le y_l$ функция $f(x,y)$ восстанавливается двумерным полиномом $g_{p,q}^{k,l}(x,y)$ степени $p+q$. Таким образом, для каждого полинома необходимо определить $(p+1)(q+1)$ коэффициентов. А для этого нужно построить $(p+1)(q+1)$ соотношений.

Потребуем, чтобы выполнялось следующее условие:

$$g(x_k,y_l)=f_{k,l};\quad k=\overline{0,n};\quad l=\overline{0,m}. \tag{2}$$

Тем самым получим четыре соотношения для каждого полинома, используя угловые точки прямоугольной области:

$$g_{p,q}^{k,l}(x_s,y_t)=f_{s,t};\quad s=\overline{k-1,k};\quad t=\overline{l-1,l};\quad k=\overline{1,n};\quad l=\overline{1,m}. \tag{3}$$

Используя (1) получим:

$$\begin{aligned}
&g_{p,q}^{k,l}(x_{k-1},y_{l-1})=a_{0,0}^{k,l}=f_{k-1,l-1};\\
&g_{p,q}^{k,l}(x_{k-1},y_l)=\sum_{j=0}^{q}a_{0,j}^{k,l}(y_l-y_{l-1})^j=f_{k-1,l};\\
&g_{p,q}^{k,l}(x_k,y_{l-1})=\sum_{i=0}^{p}a_{i,0}^{k,l}(x_k-x_{k-1})^i=f_{k,l-1}; \qquad k=\overline{1,n};\quad l=\overline{1,m}.\\
&g_{p,q}^{k,l}(x_k,y_l)=\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}a_{i,j}^{k,l}(x_k-x_{k-1})^i(y_l-y_{l-1})^j=f_{k,l};
\end{aligned} \tag{4}$$

Для полной определенности задачи необходимо построить еще $(p+1)(q+1)-4$ соотношений для каждого полинома. Данные соотношения можно получить, если известны значения производных от функции $f(x,y)$ в узлах сетки. Однако в данной постановке задачи эти значения неизвестны, но их можно приближенно вычислить, используя метод неопределенных коэффициентов.

Отметим, что в случае равномерной сетки по обеим осям матрица для системы метода неопределенных коэффициентов одинакова для всех прямоугольников сетки. Это позволяет один раз построить LU-разложение для матрицы системы и пользоваться этим разложением при нахождении всех коэффициентов искомого полинома.

Приведем сравнительную характеристику алгоритмов аппроксимации: бикубического сплайна и модификации эрмитовской аппроксимации функций от двух переменных. В качестве тестовой была выбрана следующая функция:

$$f(x,y) = \sin((x+y)^2) + arctg(xy) \tag{5}$$

Оценка погрешности осуществлялась по формуле

$$R = \sqrt{\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d (f(x,y) - g_{p,q}(x,y))^2\,dxdy}\,. \tag{6}$$

При восстановлении функции на равномерной сетке формула имеет вид:

$$\sqrt{\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d (f(x,y) - g_{p,q}(x,y))^2\,dxdy} \approx \sqrt{\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(f(\bar{x}_i,\bar{y}_j) - g_{p,q}(\bar{x}_i,\bar{y}_j))^2}\,, \tag{7}$$

где $(\bar{x}_i,\bar{y}_j)$ – середина частичного прямоугольника $[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$.

В таблице 1 приводятся результаты численного эксперимента восстановления функции (5) на прямоугольной области $[0;3.14]\times[0;3.14]$ указанными выше алгоритмами.

Таблица – Точность восстановления функции от двух переменных (14)

Алгоритм восстановления	Число точек разбиения прямоугольной области			
	50×50	100×100	250×250	500×500
Бикубический сплайн	0.03839356	0.00980709	0.00157862	0.00039499
Модификация эрмитовской аппроксимации	6.384570E-6	1.037862E-7	1.932895E-9	3.60386E-10

Из таблицы 1 видно, что восстановление при помощи модификации эрмитовской аппроксимации намного точнее, чем при использовании бикубических сплайнов. Однако восстановление первым алгоритмом требует значительных временных затрат, а также большого объема памяти для хранения коэффициентов. В то же время восстановление бикубическими сплайнами осуществляется очень быстро и не требует много памяти. Поэтому при решении задач следует выбирать между точностью и скоростью.

Список использованных источников

1. Худяков, А.П. Об одном способе восстановления сеточного решения задачи Дуффинга / А.П. Худяков, В.М. Мадорский // Современные информационные компьютерные технологии: сб. науч. ст. в 2 ч. Ч. 2 / ГрГУ им. Я. Купалы – Гродно, 2008. с. 275 – 278.
2. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1977. – 456 с.
3. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения уравнений. Брест УО БрГУ им. А.С. Пушкина. 2005. – 186 с.
4. Калиткин, Н.Н. Численные методы. М: Наука - 1978. 510 с.