УДК 519.216.74

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ И ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А.Л. Черноокий, *преподаватель*
Научный руководитель – ***Н.Н. Труш,*** *д.физ.-мат.н., профессор*
Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина

Пусть $\xi_1, \xi_2, ...$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F_\xi(x) = F_{\xi_i}(x)$, $i = 1,2,...$

Определение [1]. Случайная величина ξ с функцией распределения $F_\xi(x)$ и характеристической функцией $\psi_\xi(t), t\in R$ называется устойчивой, если для каждого $n=1,2,...$ найдутся такие константы $c_n>0$ и $\gamma_n \in R$, что

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_n \overset{D}{=} c_n\xi+\gamma_n\ , \tag{1}$$

где знак $\overset{D}{=}$ означает равенство по распределению.

Проверка принадлежности функции к устойчивому распределению, используя соотношение (1) не всегда удобна, поэтому на практике используют один из критериев принадлежности случайной величины к устойчивому закону [2].

Критерий 1. Случайная величина ξ с функцией распределения $F_\xi(x)$ будет устойчивой тогда и только тогда, когда для любых положительных чисел b_1 и b_2 найдутся положительное b и вещественное a такие, что

$$F_\xi(\frac{x}{b_1}) * F_\xi(\frac{x}{b_2}) = F_\xi(\frac{x-a}{b}), \tag{2}$$

где знак $*$ означает свертку функций.

Критерий 2. Случайная величина ξ будет устойчивой тогда и только тогда, когда логарифм ее характеристической функции $\psi_\xi(t), t\in R$ представим в виде

$$\ln\psi_\xi(t)=i\mu t-\sigma^\alpha\,|\,t\,|^\alpha+i\sigma^\alpha t\omega(t,\alpha,\beta), \tag{2}$$

$$\omega(t,\alpha,\beta)=\begin{cases}|\,t\,|^{\alpha-1}\ \beta tg(\pi\alpha/2), \alpha\neq 1,\\ -2\beta\ln|\,t\,|/\pi, \alpha=1,\end{cases}$$

где $\alpha\in(0,2], \beta\in[-1,1], \sigma>0, \mu\in R$.

Любой из этих критериев при необходимости можно использовать как определение устойчивого распределения. Дадим трактовку параметров из критерия 2: α – характеристический параметр, показывает «тяжесть» хвоста распределения, β – параметр асимметрии, при $\beta=0$ распределение симметрично, σ – параметр масштаба, μ – сдвиг. Если случайная величина ξ удовлетворяет критерию 2, то будем писать $\xi \sim S_\alpha(\beta,\sigma,\mu)$.

В случае если $\sigma=1$ и $\mu=0$ случайная величина называется стандартной.

Свойство 1. Для любых двух допустимых наборов параметров $(\alpha,\beta,\sigma_1,\mu_1)$ и $(\alpha,\beta,\sigma_2,\mu_2)$ существуют такие однозначно определяемые ими вещественные числа $a>0$ и b, что

$$S_\alpha(\beta,\sigma_1,\mu_1)\overset{D}{=}aS_\alpha(\beta,\sigma_2,\mu_2)+\sigma b, \tag{3}$$

где

$$a=\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^{1/\alpha},$$

$$b=\begin{cases}\mu_1-\mu_2(\mu_1/\mu_2)^{1/\alpha}, если\,\alpha\neq 1,\\ \mu_1-\mu_2+\dfrac{2}{\pi}\beta\ln(\mu_1/\mu_2), если\,\alpha=1.\end{cases}$$

Из свойства 1 можно получить очень важный частный случай перехода к стандартной устойчивой величине.

Свойство 2. Для любого допустимого набора параметров $(\alpha,\beta,\sigma_1,\mu_1)$

$$S_\alpha(\beta,\sigma,\mu)\overset{D}{=}\mu^{1/\alpha}S_\alpha(\beta,1,0)+\sigma(\mu+b_0), \tag{4}$$

где $b_0=0$, если $\alpha\neq 1$ и $b_0=\dfrac{2}{\pi}\beta\ln\sigma$, если $\alpha=1$.

Свойство 2 позволяет, не уменьшая общности, далее рассматривать только стандартные устойчивые распределения. Обозначим через $F(x,\alpha,\beta)$ функцию распределения стандартной устойчивой величины, а через $f(x,\alpha,\beta)$ – плотность.

Существуют только три случая представления плотности распределения в элементарных функциях, это $f(x,\frac{1}{2},1)$ – распределение Леви, $f(x,1,0)$ – распределение Коши, $f(x,2,\beta)$ – распределение Гаусса, в последнем случае параметр β теряет всякий смысл.

Существует интегральное представление [2] для плотности распределения в остальных случаях. В случае $\alpha \neq 1$

$$f(x,\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^\infty \exp\left(-itx - t^\alpha \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha)\right)\right)dt, \quad (5)$$

где $K(\alpha) = \alpha - 1 + \mathrm{sgn}(1-\alpha)$, а в случае $\alpha = 1$

$$f(x,1,\beta) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^\infty \exp\left(-itx - \frac{\pi}{2}t - i\beta t\ln t\right)dt. \quad (6)$$

Аналитическое выражение для интегралов (5), (6) невозможно, а их численное вычисление весьма затруднительно. Путем преобразования можно получить соотношения для случая $x > 0, \alpha \neq 1$:

$$f(x,\alpha,\beta) = \frac{\alpha x^{1/(\alpha-1)}}{1|1-\alpha|}\int_{-s}^{1} U_\alpha(t,s)\exp\left(-x^{1/(\alpha-1)}U_\alpha(t,s)\right)dt, \quad (7)$$

в случае $\alpha = 1, \beta \neq 0$

$$f(x,\alpha,\beta) = \frac{1}{2|\beta|}e^{-x/\beta}\int_{-1}^{1} U_1(t,\beta)\exp\left(-e^{-x/\beta}U_1(t,\beta)\right)dt, \quad (8)$$

где

$$U_\alpha(t,s) = \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha(t+s)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(\alpha-1)t + \alpha s\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)},\ U_1(t,\beta) = \frac{\pi}{2}\frac{1+\beta t}{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}\exp\left(\frac{\pi}{2}(t+1/\beta)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right),$$

$s = \beta K(\alpha)/\alpha$.

Для случая $x < 0$ можно воспользоваться свойством: $f(-x,\alpha,-\beta) = f(x,\alpha,\beta)$.

Для заданного набора значений (x,α,β) можно численно [3] найти значение $f(x,\alpha,\beta)$ по формулам (7), (8).

Список использованных источников

1. 1. Труш, Н. Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов, Мн.:БГУ, 1999. – 218 с.
2. Zolotarev V. M., Uchaikin V. M., Stable Distributions and their Applications.: VSP, 1999.
3. Бабенко К.И. Основы численного анализа. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 848 с.