УДК 519.6 + 517.983.54

# РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ПРИБЛИЖЁННЫМ ОПЕРАТОРОМ

***Л.В. Викторович**, 5 курс*
*Научный руководитель – **О.В. Матысик**, к.ф.–м.н., доцент*
*Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина*

В работе рассматривается операторное уравнение первого рода

$$Ax = y_\delta \tag{1}$$

с действующим в гильбертовом пространстве *H* ограниченным положительным самосопряженным оператором $A: H \to H,$ в предположении, что нуль принадлежит спектру этого оператора, однако, вообще говоря, не является его собственным значением. Здесь $\|y - y_\delta\| \le \delta.$ При сделанных предположениях задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если решение уравнения (1) все же существует, то для его отыскания предлагается регуляризатор в виде итерационного процесса неявного типа

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha\left(Ax_{n+1,\delta} - y_\delta\right), \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{2}$$

Справедлива [1]

Теорема. *Если решение* $x$ *уравнения* (1) *истокообразно представимо* ($x = A^s z, \quad s > 0$), *то при условии* $\alpha > 0$ *для метода* (2) *справедлива оценка погрешности* $\|x - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \le s^s (2n\alpha)^{-s} \|z\| + n\alpha\delta.$

Рассмотрим случай, когда счёт ведется по методу (2) не с оператором $A$, а с оператором $A_h$, $\|A - A_h\| \le h.$ Введём погрешность $\eta_n = u_{n,\delta} - x_{n,\delta}$, где

$$\left(E + \alpha A_h\right) u_{n+1,\delta} = u_{n,\delta} + \alpha y_\delta, \quad u_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Имеем $\left(E + \alpha A_h\right) u_{n+1,\delta} - \left(E + \alpha A_h\right) x_{n+1,\delta} = u_{n,\delta} + \alpha y_\delta - \left(E + \alpha A_h\right) x_{n+1,\delta}$. Тогда

$$\left(E + \alpha A_h\right)\eta_{n+1} = u_n + \alpha y_\delta - \left(E + \alpha A_h\right) x_{n+1,\delta};$$

$$\left(E + \alpha A_h\right)\eta_{n+1} = (u_{n,\delta} - x_{n,\delta}) + (x_{n,\delta} + \alpha y_\delta) - \left(E + \alpha A_h\right) x_{n+1,\delta}.$$

Из (3) следует $\left(E + \alpha A_h\right)\eta_{n+1} = \eta_n + \left(E + \alpha A\right) x_{n+1,\delta} - x_{n+1,\delta} - \alpha A_h x_{n+1,\delta}$;

$$\left(E + \alpha A_h\right)\eta_{n+1} = \eta_n + \alpha\left(A - A_h\right) x_{n+1,\delta}.$$

Отсюда

$$\left(E + \alpha A_h\right)\eta_{n+1} = \eta_n + \alpha B x_{n+1,\delta}, \tag{4}$$

где $B = A - A_h$, $\|B\| \le h$, $\eta_0 = 0$. Покажем по индукции, что

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(E + \alpha A_h\right)^{-(k+1)} \alpha B x_{n-k,\delta}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) $\eta_1 = \left(E + \alpha A_h\right)^{-1} \alpha B x_{1,\delta}$, следовательно, при $n = 1$ формула (5) верна. Предположим, что она справедлива при $n = p$, т. е. верно, что $\eta_p = \sum_{k=0}^{p-1} \left(E + \alpha A_h\right)^{-(k+1)} \alpha B x_{p-k,\delta}$ и покажем её справедливость при $n = p + 1$. Имеем

$$\eta_{p+1} = \left(E + \alpha A_h\right)^{-1} \left(\eta_p + \alpha B x_{p+1,\delta}\right) =$$

$$= \left(E + \alpha A_h\right)^{-1} \left( \sum_{k=0}^{p-1} \left(E + \alpha A_h\right)^{-(k+1)} \alpha B x_{p-k,\delta} + \alpha B x_{p+1,\delta} \right) =$$

$$= \left(E + \alpha A_h\right)^{-1} \Big[ \left(E + \alpha A_h\right)^{-1} \alpha B x_{p,\delta} + \left(E + \alpha A_h\right)^{-2} \alpha B x_{p-1,\delta} + \ldots +$$

$$\left(E + \alpha A_h\right)^{-p} \alpha B x_{1,\delta} +$$

$$+ \alpha B x_{p+1,\delta} \Big] =$$

$$\left(E + \alpha A_h\right)^{-1} \alpha B x_{p+1,\delta} + \left(E + \alpha A_h\right)^{-2} \alpha B x_{p,\delta} + \left(E + \alpha A_h\right)^{-3} \alpha B x_{p-1,\delta} + \ldots +$$

$$+ \left(E + \alpha A_h\right)^{-(p+1)} \alpha B x_{1,\delta} = \sum_{k=0}^{p} \left(E + \alpha A_h\right)^{-(k+1)} \alpha B x_{p+1-k,\delta}.$$

Следовательно, формула (5) доказана.

Так как $\|x_{n,\delta}\| = \left\| A^{-1} \left[ E - \left(E + \alpha A\right)^{-n} \right] y_\delta \right\| \le n\alpha \|y_\delta\|$, то $\|x_{n-k,\delta}\| \le (n-k)\alpha \|y_\delta\|$.

Для оценки $\left\| \left(E + \alpha A_h\right)^{-(k+1)} \right\|$ потребуем, чтобы пространство $H$ было сепарабельным и оператор $A_h$ сокоммутировал с $A$, тогда [2, с. 388] он является функцией оператора $A$, т. е. $A_h = \int_0^M \phi(\lambda) dE_\lambda$ и спектральная функция у этих операторов одна и та же. Следовательно, $\|A - A_h\| = = \max\limits_{[0,M]} |\lambda - \varphi(\lambda)| \le h$, так что

$$\left\| \left(E + \alpha A_h\right)^{-(k+1)} \right\| = \max_{[0,M]} \frac{1}{|1 + \alpha\varphi(\lambda)|^{k+1}} \le \max_{[0,M]} \frac{1}{|1 + \alpha(\lambda - h)|^{k+1}} \le \frac{1}{|1 - \alpha h|^{k+1}}.$$

Таким образом, считая $\alpha h < 1$, имеем $\|\eta_n\| \le \alpha^2 h \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{n-k}{(1 - \alpha h)^{k+1}} \|y_\delta\|$.

Покажем, по индукции, что

$$\alpha^2 h\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{(1-\alpha h)^{k+1}}\|y_\delta\| = h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^n}-n\alpha h-1\right]\|y_\delta\| \qquad (6)$$

При $n=1$ равенство (6) справедливо. Предположим, что оно верно при $n=p$,

т. е. $\alpha^2 h\sum_{k=0}^{p-1}\frac{p-k}{(1-\alpha h)^{k+1}}\|y_\delta\| = h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^p}-p\alpha h-1\right]\|y_\delta\|$ и рассмотрим при $n=p+1$. Имеем

$$\alpha^2 h\sum_{k=0}^{p}\frac{p+1-k}{(1-\alpha h)^{k+1}}\|y_\delta\| = \alpha^2 h\left[\frac{p+1}{1-ah}+\frac{p}{(1-\alpha h)^2}+\frac{p-1}{(1-\alpha h)^3}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{(1-\alpha h)^p}+\frac{1}{(1-\alpha h)^{p+1}}\right]\|y_\delta\| = \alpha^2 h\left[\frac{p+1}{1-\alpha h}+\frac{1}{1-\alpha h}\left(\frac{p}{1-\alpha h}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{p-1}{(1-\alpha h)^2}+\ldots+\frac{1}{(1-\alpha h)^p}\right)\right]\|y_\delta\| = \alpha^2 h\left[\frac{p+1}{1-\alpha h}+\frac{1}{1-\alpha h}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{p-k}{(1-\alpha h)^{k+1}}\right]\|y_\delta\| =$$

$$=\left[\frac{\alpha^2 h(p+1)}{1-\alpha h}+\frac{\alpha^2 h}{1-\alpha h}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{p-k}{(1-\alpha h)^{k+1}}\right]\|y_\delta\| = \left[\frac{\alpha^2 h(p+1)}{1-\alpha h}+\frac{1}{h(1-\alpha h)}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{(1-\alpha h)^p}-p\alpha h-1\right)\right]\|y_\delta\| = \frac{h^{-1}}{1-\alpha h}\left[\alpha^2 h^2(p+1)+\frac{1}{(1-\alpha h)^p}-p\alpha h-1\right]\|y_\delta\| =$$

$$=h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^{p+1}}+\frac{\alpha^2 h^2 p+\alpha^2 h^2-p\alpha h-1}{1-\alpha h}\right]\|y_\delta\| = h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^{p+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{(\alpha h-1)(\alpha h(p+1)+1)}{1-\alpha h}\right]\|y_\delta\| = h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^{p+1}}-(p+1)\alpha h-1\right]\|y_\delta\|.$$

Итак, формула (6) доказана. Следовательно, $\|\eta_n\| \le h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^n}-n\alpha h-1\right]\|y_\delta\|.$

Запишем теперь общую оценку погрешности метода (2) с учётом неточности в правой части уравнения (1) и погрешности в операторе

$$\|x-u_{n,\delta}\| \le \|x-x_n\|+\|x_n-x_{n,\delta}\|+\|x_{n,\delta}-u_{n,\delta}\| \le \qquad \le s^s(2n\alpha)^{-s}\|z\|+n\alpha\delta+$$

$$h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^n}-n\alpha h-1\right]\|y_\delta\|.$$

Предложенный метод может быть применён для решения прикладных некорректных задач, встречающихся в технике, медицине, сейсмике, экономике.

**Список использованных источников**

1. Викторович, Л.В. Априорный выбор числа итераций в методе неявного типа для решения некорректных задач / Л.В. Викторович // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии: материалы

рег. науч.–практ. конф., Брест, 22–23 октября 2013 г. / Брест. гос. ун–т; под общ. ред. О.В. Матысика. – Брест, 2013. – С. 13.
2. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В.И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.