УДК 519.65 + 517.548.5

МАТРИЧНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ЛАГРАНЖЕВА ТИПА ДЛЯ СЛУЧАЯ СИНГУЛЯРНЫХ МАТРИЦ

***И.В. Кочергин**, 5 курс*
*Научный руководитель – **А.П. Худяков**, к.ф.–м.н.*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

На множестве квадратных матриц одна из известных формул матричного тригонометрического интерполирования [1, с. 461] вида

$$T_n(A)=\sum_{k=0}^{2n}\Psi_k(A)\Psi_k^{-1}(A_k)F(A_k),$$

где $\Psi_k(A)=\sin\frac{A-A_0}{2}\cdots\sin\frac{A-A_{k-1}}{2}\sin\frac{A-A_{k+1}}{2}\cdots\sin\frac{A-A_{2n}}{2}$, существует, если матрицы $\sin\frac{A_\nu-A_k}{2}$ $(\nu\neq k)$ обратимы.

Приведем матричный тригонометрический интерполяционный многочлен, когда существование обратных матриц $\sin^{-1}\frac{A_\nu-A_k}{2}$ не требуется. Пусть S_{lr} и S_{rl} есть $l\times r-$ и $r\times l-$матрицы $(r\geq l)$ следующих структур:

$$S_{lr}=\left[I_l\mid O_{l,r-l}\right] \text{ и } S_{rl}=\begin{bmatrix} I_l \\ O_{r-l,l}\end{bmatrix}, \qquad (1)$$

где I_l – единичная матрица размерности l, а $O_{l,r-l}$ и $O_{r-l,l}$ – нулевые матрицы указанных размерностей. Очевидно, что $S_{lr}S_{rl}=I_l$.

Пусть $\widetilde{\Psi}_k(A)=\Psi_k(A)\Psi_k^{+}(A_k)$, где $\Psi_k^{+}(A_k)$ – псевдообратная матрица Мура–Пенроуза для матрицы $\Psi_k(A_k)$, которая, как известно, всегда существует и единственна [2, с. 33–35] для любых матриц, а r_k и l_k – ранги матриц $\widetilde{\Psi}_k(A_k)$ и $F(A_k)$ соответственно $(k=0,1,...,2n)$.

Теорема. *Пусть* $\widetilde{\Psi}_k(A_k)=B_kC_k$ *и* $F(A_k)=M_kN_k$ *– скелетные разложения матриц* $\widetilde{\Psi}_k(A_k)$ *и* $F(A_k)$ $(k=0,1,\ldots,2n)$. *Тогда для матричного многочлена*

$$T_n(A)=\sum_{k=0}^{2n}F(A_k)N_k^{+}S_{l_k r_k}B_k^{+}\tilde{\Psi}_k(A)C_k^{+}S_{r_k l_k}M_k^{+}F(A_k), \tag{2}$$

при условии, что $l_k \le r_k \;\; (k=0,1,\dots,2n)$, *выполняются интерполяционные условия*

$$T_n(A_\nu)=F(A_\nu) \;\; (\nu=0,1,\dots,2n). \tag{3}$$

Пример. Для матричной функции $F(A)=e^{\sin A}-e^{\sqrt{3}/2}I$, где I – единичная матрица второго порядка, и узлов

$$A_0=\frac{\pi}{12}\begin{bmatrix}4 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\; A_1=\frac{\pi}{48}\begin{bmatrix}16 & 0\\ -3 & 28\end{bmatrix},\; A_2=\frac{\pi}{12}\begin{bmatrix}51 & 0\\ 10 & 11\end{bmatrix}$$

построим интерполяционный многочлен вида (2) при $n=1$. Нетрудно заметить, что для функции $F(A)$ выполняются ограничения, накладываемые на ранги: $l_k \le r_k \;\; (k=0,1,2)$. В узлах $F(A)$ принимает значения

$$F(A_0)=\frac{\alpha_1-1}{4}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -4\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0{,}344 & -1{,}377\end{bmatrix},$$

$$F(A_1)=\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -4\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}0 & 0\\ -0{,}0624 & 0{,}250\end{bmatrix},$$

$$F(A_2)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4(\alpha_2-\alpha_1) & 0\\ \alpha_2-\alpha_4 & 4(\alpha_4-\alpha_1)\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}-0{,}349 & 0\\ 0{,}183 & -1{,}082\end{bmatrix},$$

где $\alpha_1=e^{\sqrt{3}/2},\; \alpha_2=e^{1/\sqrt{2}},\; \alpha_3=e^{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}},\; \alpha_4=e^{\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$.

Матрицы $\sin\frac{A_0-A_1}{2}=\frac{1}{4}\sin\frac{7\pi}{24}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -4\end{bmatrix}$, $F(A_0)$ и $F(A_1)$ не имеют обратных, поэтому построим их скелетные разложения, используя аппарат псевдообратных матриц Мура–Пенроуза. В нашем случае

$$\tilde{\Psi}_0(A_0)=\tilde{\Psi}_1(A_1)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\; \tilde{\Psi}_2(A_2)=I.$$

Скелетные разложения данных матриц, а также значений $F(A_k)$ имеют, соответственно, вид $\tilde{\Psi}_k(A_k)=B_kC_k$ и $F(A_k)=M_kN_k \;\; (k=0,1,2)$, где $C_j=B_j^T=M_j^T=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$ при $j=0,1$, $B_2=C_2=M_2=I$, матрицы N_0, N_1 совпадают со вторыми строками матриц $F(A_0)$ и $F(A_1)$, а $N_2=F(A_2)$. При этом, псевдообратные матрицы B_k^+, C_k^+, M_k^+ равны, соответственно, транспонированным матрицам $B_k^T, C_k^T, M_k^T \;\; (k=0,1,2)$, а

$$N_0^{+}=\frac{4}{17(\alpha_1-1)}\begin{bmatrix}1\\ -4\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}0{,}171\\ -0{,}683\end{bmatrix},\; N_1^{+}=\frac{4}{17(\alpha_1-\alpha_3)}\begin{bmatrix}1\\ -4\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}-0{,}942\\ 3{,}768\end{bmatrix},$$

$$N_2^{+}=\frac{1}{4(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_4)}\begin{bmatrix}4(\alpha_4-\alpha_1) & 0\\ \alpha_4-\alpha_2 & 4(\alpha_2-\alpha_1)\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}-2{,}863 & 0\\ -0{,}485 & -0{,}924\end{bmatrix}.$$

Как видно, ранги матриц $\widetilde{\Psi}_k(A_k)$ и $F(A_k)$ принимают значения

$$r_0 = r_1 = l_0 = l_1 = 1, \; r_2 = l_2 = 2.$$

Тогда $S_{l_j r_j} = S_{r_j l_j} = S_{11} = 1$ при $j = 0,1,$ а $S_{l_2 r_2} = S_{r_2 l_2} = S_{22} = I.$

Таким образом, в нашем случае многочлен (2) при $n = 1$ имеет вид

$$T_1(A) = \sum_{k=0}^{2} G_k \Psi_k(A) H_k, \qquad (4)$$

где

$$G_0 = G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; G_2 = I, \; H_0 = \begin{bmatrix} -0{,}103 & 0{,}412 \\ 0{,}412 & -1{,}648 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} -0{,}037 & 0{,}148 \\ 0{,}148 & -0{,}593 \end{bmatrix}, \; H_2 = \begin{bmatrix} -20{,}504 & 0 \\ -4{,}5803 & -2{,}183 \end{bmatrix}.$$

В узлах A_0, A_1 и A_2 функции $\Psi_k(A)$ принимают значения

$$\Psi_0(A_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0{,}197 & 0{,}787 \end{bmatrix}, \; \Psi_1(A_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}0992 & -0{,}397 \end{bmatrix},$$

$$\Psi_2(A_2) = \begin{bmatrix} 0{,}017 & 0 \\ -0{,}120 & 0{,}496 \end{bmatrix}, \; \Psi_k(A_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; (k \neq i, \; k, i = 0,1,2).$$

Нормы невязок в средних точках A_{01}, A_{02} и A_{12} $\big(A_{kj} = (A_k + A_j)/2$ $(k = 0,1; \; j = 1,2)\big)$ равны

$$\left\| F(A_{01}) - T_1(A_{01}) \right\|_2 = 0{,}187, \; \left\| F(A_{02}) - T_1(A_{02}) \right\|_2 = 0{,}082,$$

$$\left\| F(A_{12}) - T_1(A_{12}) \right\|_2 = 0{,}123.$$

Как видим, многочлен (2) при $n = 1$ достаточно хорошо приближает функцию $F(A)$.

Алгебраические и экспоненциальные матричные интерполяционные многочлены, аналогичные (2), построены также в [1, с. 494] и [3, с. 145].

Список использованных источников

1. Makarov, Volodymyr L. Methods of Operator Interpolation / Volodymyr L. Makarov, Volodymyr V. Khlobystov, Leonid A. Yanovich. – Київ : Праці Ін–ту математики НАН України, 2010. – Т. 83. – 517 с.

2. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – 3–е изд. – М. : Наука, 1967. – 575 с.

3. Yanovich, L.A. On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables / L.A. Yanovich, A.P. Hudyakov // J. Numer. Appl. Math. – 2011. – № 2 (105). – P. 136–147.