УДК 519.624.2 + 517.927.4

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ВТОРОГО ПОРЯДКА РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

М.И. Плитко, М.А. Шавлюк*, 4 курс*
Научный руководитель – ***А.П. Худяков****, к.ф.–м.н.*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

Нелинейные краевые дифференциальные задачи второго порядка довольно часто встречаются в различных областях математики и математической физики. Широко известным классическим примером такой задачи является краевая задача Дуффинга [1], дифференциальное уравнение которой

$$x'' + kx' + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = F\cos\omega t, \tag{1}$$

описывает поведение системы с нелинейной восстанавливающей силой $f(x) = -\omega_0^2 x - \alpha x^3$ и затуханием, совершающей вынужденные колебания при гармоническом внешнем воздействии $F(t) = F\cos\omega t.$ Решения уравнения (1) в элементарных функциях неизвестны [2, с. 89].

Одним из эффективных методов решения задач такого класса является разностный метод. Суть его заключается в замене производных, участвующих в уравнении, соответствующими разностными аппроксимациями в узлах сетки. При этом дифференциальная краевая задача сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим краевые условия двух видов

$$x(0)=\beta_1, \quad x(2\pi)=\beta_2, \tag{2}$$

$$x(0)=x(2\pi), \quad x'(0)=x'(2\pi). \tag{3}$$

Уравнения (1), (2) определяют непериодическую краевую задачу Дуффинга с краевыми условиями первого рода, а (1), (3) – периодическую краевую задачу.

Важным этапом решения данных задач является аппроксимация производных, входящих в уравнение. Хорошо известны простейшие формулы приближения первой и второй производной по трем точкам

$$y'(x)=\frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h}+O(h^2), \; y''(x)=\frac{y(x-h)-2y(x)+y(x+h)}{h^2}+O(h), \tag{4}$$

однако их использование не позволяет получить решение с высокой точностью.

Одним из способов повышения точности решения является использование при аппроксимации производных большего числа точек. По методу неопределенных коэффициентов выражение для производной $y^{(k)}(x_i)$ представляется в виде

$$y^{(k)}(x_i)=\sum_{j=0}^{n}c_j x_j+R(f), \tag{5}$$

где коэффициенты c_j подбираются из условия $R(f)=0,$ когда $f=1, x, x^2, \ldots, x^n$. В результате получается система линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов c_j:

$$\begin{cases} c_0+c_1+\ldots+c_n=0, \\ c_0x_0+c_1x_1+\ldots+c_nx_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0x_0^{k-1}+c_1x_1^{k-1}+\ldots+c_nx_n^{k-1}=0, \\ c_0x_0^{k}+c_1x_1^{k}+\ldots+c_nx_n^{k}=k!, \\ c_0x_0^{k+1}+c_1x_1^{k+1}+\ldots+c_nx_n^{k+1}=(k+1)!x_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0x_0^{n}+c_1x_1^{n}+\ldots+c_nx_n^{n}=\dfrac{n!}{(n-k)!}x_i^{n-k}. \end{cases} \tag{6}$$

Рассмотрим систему следующего вида:

$$
\begin{cases}
c_0+c_1+\ldots+c_n=0,\\
c_0(x_0+C)+c_1(x_1+C)+\ldots+c_n(x_n+C)=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_0(x_0+C)^{k-1}+c_1(x_1+C)^{k-1}+\ldots+c_n(x_n+C)^{k-1}=0,\\
c_0(x_0+C)^{k}+c_1(x_1+C)^{k}+\ldots+c_n(x_n+C)^{k}=k!,\\
c_0(x_0+C)^{k+1}+c_1(x_1+C)^{k+1}+\ldots+c_n(x_n+C)^{k+1}=(k+1)!(x_i+C),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_0(x_0+C)^{n}+c_1(x_1+C)^{n}+\ldots+c_n(x_n+C)^{n}=\dfrac{n!}{(n-k)!}(x_i+C)^{n-k},
\end{cases}
\tag{7}
$$

где C – const. В [3, с. 24] доказано, что системы (6) и (7) эквивалентны, т.е. имеют одно и тоже решение. Проведенный численный эксперимент показал, что использование системы (7) вместо (6) более эффективно, так как при привлечении большого числа узлов для аппроксимации производных ($n \geq 10$) система (6) становится плохо обусловленной и сильно искажает решение. Наилучшие результаты были получены при $C=-x_i$. При этом стало возможным использование большего числа узлов для аппроксимации производных ($n \approx 20 \div 40$), что значительно повысило точность вычислений.

Решение нелинейной алгебраической системы, соответствующей разностной схеме, осуществлялось квазиньютоновскими итерационными процессами в два этапа. На первом этапе система решалась процессами, локально сходящимися с квадратичной скоростью сходимости, на втором этапе полученное решение уточнялось методами, сходящимися с кубической скоростью сходимости.

Полученные сеточные решения непериодической задачи восстанавливались непериодическими сплайнами пятой степени, а решения периодической задачи – отрезком тригонометрического ряда Фурье.

Приведем результаты вычислительного эксперимента для случая, когда параметры уравнения (1) равны $k=0{,}2;\ \omega_0=\alpha=\omega=1;\ F=50.$

Таблица 1 – Точность решения непериодической задачи Дуффинга

n \ N	128	256	300	384	456	512	700	1024
3	$6{,}9\times10^{-1}$	$1{,}1\times10^{-1}$	$7{,}7\times10^{-2}$	$4{,}7\times10^{-2}$	$3{,}3\times10^{-2}$	$2{,}6\times10^{-2}$	$1{,}4\times10^{-2}$	$6{,}6\times10^{-3}$
7	$3{,}4\times10^{-1}$	$6{,}1\times10^{-4}$	$3{,}1\times10^{-4}$	$1{,}1\times10^{-4}$	$5{,}6\times10^{-5}$	$3{,}6\times10^{-5}$	$1{,}1\times10^{-5}$	$2{,}6\times10^{-6}$
11	$3{,}1\times10^{-1}$	$1{,}6\times10^{-4}$	$8{,}3\times10^{-5}$	$3{,}0\times10^{-5}$	$1{,}5\times10^{-5}$	$9{,}5\times10^{-6}$	$2{,}7\times10^{-6}$	$5{,}9\times10^{-7}$
15	$3{,}1\times10^{-1}$	$1{,}6\times10^{-4}$	$8{,}2\times10^{-5}$	$3{,}0\times10^{-5}$	$1{,}5\times10^{-5}$	$9{,}5\times10^{-6}$	$2{,}7\times10^{-6}$	$5{,}9\times10^{-7}$
21	$3{,}0\times10^{-1}$	$1{,}6\times10^{-4}$	$8{,}2\times10^{-5}$	$3{,}0\times10^{-5}$	$1{,}5\times10^{-5}$	$9{,}5\times10^{-6}$	$2{,}7\times10^{-6}$	$5{,}9\times10^{-7}$

Таблица 2 – Точность решения непериодической задачи Дуффинга

N \ n	128	256	300	384	456	512	700	1024
3	$4{,}4\times10^{-1}$	$1{,}1\times10^{-1}$	$7{,}7\times10^{-2}$	$4{,}7\times10^{-2}$	$3{,}3\times10^{-2}$	$2{,}6\times10^{-2}$	$1{,}4\times10^{-2}$	$6{,}5\times10^{-3}$
7	$2{,}3\times10^{-3}$	$4{,}1\times10^{-5}$	$1{,}6\times10^{-5}$	$3{,}6\times10^{-6}$	$1{,}3\times10^{-6}$	$6{,}5\times10^{-7}$	$1{,}0\times10^{-7}$	$1{,}0\times10^{-8}$
11	$1{,}1\times10^{-4}$	$1{,}8\times10^{-7}$	$3{,}8\times10^{-8}$	$3{,}4\times10^{-9}$	$6{,}2\times10^{-10}$	$2{,}0\times10^{-10}$	$1{,}1\times10^{-11}$	$2{,}3\times10^{-11}$
15	$1{,}6\times10^{-5}$	$3{,}0\times10^{-9}$	$3{,}7\times10^{-10}$	$1{,}3\times10^{-11}$	$2{,}6\times10^{-12}$	$2{,}2\times10^{-12}$	$6{,}5\times10^{-12}$	$2{,}3\times10^{-11}$
21	$2{,}6\times10^{-6}$	$3{,}5\times10^{-11}$	$2{,}1\times10^{-12}$	$8{,}7\times10^{-13}$	$2{,}3\times10^{-12}$	$2{,}2\times10^{-12}$	$6{,}5\times10^{-12}$	$2{,}3\times10^{-11}$
27	$8{,}6\times10^{-7}$	$1{,}5\times10^{-12}$	$5{,}3\times10^{-13}$	$8{,}7\times10^{-13}$	$2{,}3\times10^{-12}$	$2{,}2\times10^{-12}$	$6{,}5\times10^{-12}$	$2{,}3\times10^{-11}$
35	$4{,}0\times10^{-7}$	$3{,}5\times10^{-12}$	$5{,}5\times10^{-13}$	$8{,}7\times10^{-13}$	$2{,}3\times10^{-12}$	$2{,}2\times10^{-12}$	$6{,}5\times10^{-12}$	$2{,}3\times10^{-11}$
41	$3{,}2\times10^{-7}$	$5{,}2\times10^{-9}$	$6{,}1\times10^{-11}$	$1{,}5\times10^{-11}$	$3{,}1\times10^{-12}$	$2{,}2\times10^{-12}$	$6{,}5\times10^{-12}$	$2{,}3\times10^{-11}$

Анализируя данные таблиц 1 и 2 видим, что наилучшие результаты $R = 5{,}9\times10^{-7}$ в случае непериодической задачи получены при $N = 1024$ и $n = 11 \div 21$, а в случае периодической задачи $R = 5{,}3\times10^{-13}$ при $N = 300$ и $n = 27$. Здесь N – общее число узлов сетки, а n – число узлов, по которым вычисляются аппроксимации производных.

Список использованных источников

1. Duffing, G. Erzwungene Schwingungen bei veranderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung / G. Duffing. – Braunschweig : Vieweg, 1918. – 134 S.

2. Стокер, Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах / Дж. Стокер. – М. : Изд–во иностр. лит., 1952. – 264 с.

3. Худяков, А.П. Об одном подходе к решению нелинейных краевых задач разностными методами / А.П. Худяков, Р.М. Якубук // Информационные технологии управления в экономике 2006 : мат. респ. науч.–практ. конф., Брест, 25–26 апреля 2006 г. / БрГУ им. А.С. Пушкина, Брест. фил. ГУО «ФПК по ПМ и ЭВМ» БГУ ; под общ. ред. С.А. Тузика, редкол.: В.Я. Асанович [и др.]. – Брест, 2006. – С. 23–25.