УДК 517.948

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭФЕКТИВНОСТИ ОДНОШАГОВЫХ, ДВУХШАГОВЫХ И ТРЁХШАГОВЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

А. А. Артюшеня студент
В.М. Мадорский кандидат физико-математических наук, доцент
Брестский государственный университет А. С. Пушкина, madorsky@tut.by

Для решения нелинейной системы

(1) $$f(x)=0, f(D\in R^n\to R^n), f\in C_D^{(2)}.$$

применяются одношаговые, двухшаговые и трехшаговые методы.

В данной работе для решения модельной системы вида:

(2) $$\begin{cases} 2x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}+x_{n-1}+x_n=n+1, \\ x_1+2x_2+\ldots+x_{n-2}+x_{n-1}+x_n=n+1, \\ x_1+x_2+\ldots+2x_{n-2}+x_{n-1}+x_n=n+1, \\ x_1x_2\ldots x_{n-2}x_{n-1}x_n=1, \\ \sin^2 x_1+\cos x_n=\sin^2 1+\cos^3 1. \end{cases}$$

применялись одношаговые, двухшаговые и трехшаговые методы.

Алгоритм решения нелинейной системы следующий:

Шаг 1: решается система линейных алгебраических уравнений:

(3) $$f'(x_n)\Delta x_n=-f(x_n),\ \ n=0,1,2,\ldots$$

где $f'(x_n)$ - матрица Якоби, Δx_n - искомый вектор.

Шаг 2: вычисляется вектор x_{n+1} в соответствии с каждым из методов:

(4) $$x_{n+1}=x_n+\sqrt{\beta_n}\Delta x_n, n=0,1,2,\ldots,\ \ \beta_0\in[10^{-3},10^{-1}]$$

(5) $$x_{n+1}=x_n+\sqrt[3]{\beta_n}\Delta x_n, n=0,1,2,\ldots,\ \ \beta_0\in[10^{-3},10^{-1}]$$

(6) $$x_{n+1}=x_n+\beta_n\Delta x_n, n=0,1,2,\ldots,\ \ \beta_0\in[10^{-3},10^{-1}]$$

(7) $$x_{n+1}=x_n+\sqrt[4]{\beta_n}\Delta x_n, n=0,1,2,\ldots,\ \ \beta_0\in[10^{-3},10^{-1}]$$

Шаг 3: проверяется условие:

(8) $$\|f(x_{n+1})\|<\varepsilon,$$ где $$\|f(x_n)\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i^2(x_n)},$$

Если условие (8) выполняется, то x_{n+1} - приближенное решение системы (1). В противном случае производится пересчет β_{n+1}. Для чего проверяется условие: если $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_{n+1})\|$, то $\beta_{n+1} = 1$, иначе β_{n+1} находится по одной из формул (9)-(14) определенных для каждого метода, и осуществляем переход на шаг 1.

Будем рассматривать трехшаговые методы, где β_{n+1} просчитывается по формулам (9)-(12):

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\| \cdot \|f(x_{n-1})\|}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|^2}\right), \ \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \|f(x_n)\| \cdot \|f(x_{n-1})\|}{\|f(x_{n+1})\| \cdot \|f(x_{n+2})\|} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}, \ \gamma_0 = \beta_0^2 \frac{\|f(x_0)\|}{\|f(x_1)\|} \tag{9}$$

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\| \cdot \|f(x_{n-1})\|}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|^2}\right), \ \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \|f(x_{n-1})\|}{\|f(x_{n+2})\|} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}, \ \gamma_0 = \beta_0^2 \frac{\|f(x_0)\|}{\|f(x_1)\|} \tag{10}$$

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\| \cdot \|f(x_{n-1})\|}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|^2}\right), \ \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \|f(x_{n-1})\| \cdot \|f(x_{n+1})\|}{\|f(x_{n+2})\|^2} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}, \ \gamma_0 = \beta_0^2 \frac{\|f(x_0)\|^2}{\|f(x_1)\|^2} \tag{11}$$

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\| \cdot \|f(x_{n-1})\|}{\beta_n \|f(x_{n+1})\| \cdot \|f(x_n + \Delta x_n)\|}\right), \ \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \|f(x_{n-1})\| \cdot \|f(x_{n+1} + \Delta x_{n+1})\|}{\|f(x_n + \Delta x_n)\| \cdot \|f(x_{n+2})\|} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}, \tag{12}$$

$$\gamma_0 = \beta_0^2 \frac{\|f(x_0)\|^2}{\|f(x_1)\| \cdot \|f(x_0 + \Delta x_0)\|}$$

одношаговый метод Жанлава-Пузынина[1], где β_{n+1} просчитывается по формуле (13):

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\beta_n \|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\|}\right) \tag{13}$$

и двухшаговый метод, рассмотренный в работе [2], где β_{n+1} просчитывается по формуле (14):

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|}\right), \ \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+2})\|}, \ \gamma_0 = \beta_0^2 \tag{14}$$

После чего переходим к шагу 1. Причем $\|f(x_{-1})\|$ полагаем равным $\|f(x_0)\|$.

Таким образом, нами рассматриваются процессы:

(2)-(4),(9); (2),(3),(5),(10); (2),(3),(7),(11); (2),(3),(4),(12); (2),(3),(6),(13); (2),(3),(6),(14).

Относительно процесса (2)-(4),(9) может быть сформулирована

Теорема. Пусть в интересующей нас области D оператор $f \in C_D^{(2)}$, $\|(f'(x))^{-1}\| \le B$, $\|f''(x)\| \le K$, $x \in D$, $\varepsilon_0 = 0.5KB^2\beta_0\|f(x_0)\| < 1$. Тогда итерационный процесс (2)-(4),(9) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^* - решение уравнения (1), если такое решение в D существует.

Вычислительный эксперимент на модельной системе (2), проводился при следующих начальных данных: точность $\varepsilon = 10^{-12}$, $\beta_0 = 10^{-2}$, начальные приближения берутся случайным образом из отрезка $[-3,3]$. Результат эксперимента показал следующее: из рассмотренных одношаговых, двухшаговых и трехшаговых методов наиболее эффективными по скорости сходимости к решению является трехшаговый метод (2)-(4),(9) и одношаговый метод (2),(3),(6),(13). А по широте области сходимости наиболее эффективными является (2),(3),(6),(13), далее идет метод (2)-(4),(9).

ЛИТЕРАТУРА

Жанлав Т., Пузынин И.В. О сходимости на основе непрерывного аналога метода Ньютона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. –Т.32, №6. – С.846-856.

Мадорский В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений. – Брест.: БрГУ, 2005, 186с.