

Для решения системы нелинейных уравнений

$$F(x) = 0; (D \subset R^n \rightarrow R^n) \quad (1)$$

применяем модифицированный вариант метода Канторовича-Красносельского. Его идея состоит в следующем: систему нелинейных уравнений разбиваем на две части – дифференцируемую $f(x)$ и недифференцируемую $g(x)$ и для решения используем следующий алгоритм:

$$x_{n+1} = x_n - \beta_n [f'(x_n)]^{-1} (f(x_n) + g(x_n)) = x_n - \Delta x_n, n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Здесь $f'(x_n)$ производная Фреше оператора f на элементе x_n , $[f'(x_n)]^{-1}$ оператор, обратный оператору $f'(x_n)$.

Алгоритм (2) реализуется в пошаговом исполнении так:

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки Δx_n

$$f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -\beta_n (f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)), n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Шаг 2. Находится очередное приближение

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n \quad (4)$$

Шаг 3. Проверяется выполнение условия $\|f(x_{n+1}) + g(x_{n+1})\| \leq \varepsilon$, ε – малая величина (параметр останова). Если условие выполняется, то конец просчетов, иначе

Шаг 4. Производится пересчет шаговой длины

Если $\|f(x_{n+1}) + g(x_{n+1})\| < \|f(x_n) + g(x_n)\|$, то $\beta_{n+1} := 1$, иначе пересчет β_{n+1} по одной из следующих формул: (5) или (6) и переход на шаг 1.

Этот метод применялся к следующим системам уравнений 3×3 и $N \times N$:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2 + e^{|x_3|} = 2e + 1, \\ x_1^2 + |x_3| = 2, \\ x_1^2 + \ln |x_2| - x_3 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x_1| + x_2 + \dots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = n \\ x_1 + |x_2| + \dots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = n \\ \dots \\ x_1 + x_2 + \dots + |x_{n-2}| + x_{n-1} + x_n = n \\ 10 \cdot (x_n - x_{n-1}^2) + e^{|x_{n-1}|+1} = 1 \\ x_{n-1} + \ln^2 |x_n| = 1 \end{cases}$$

Результаты тестирования данных систем показали, что лучшим методом пересчета шаговой длины для систем малой размерности является метод Мадорского В.М [1]

$$\beta_{n+1} = \min \left(1, \frac{\|f(x_n)\|}{\|f(x_n)\|\beta_n} \right); \beta_0 \in [0.1 - 0.001] \quad (5)$$

для систем большой размерности метод (6)

$$\begin{aligned}
 \beta_{n+1} &= \min \left(1, \frac{\gamma_n \|f', x_n\|^2}{\beta_{n-1} \|f', x_n\|^2 + \|f', x_n + \Delta x_n\|^2} \right); \\
 \gamma_{n+1} &= \frac{\gamma_n \|f', x_n\|^4 \|f', x_{n+1}\|^2 + \|f', x_{n+1} + \Delta x_{n+1}\|^2}{\|f', x_n\|^2 + \|f', x_n + \Delta x_n\|^2 \|f', x_{n+1}\|^4}; \\
 \gamma_0 &= \beta_0^2 \frac{\|f', x_0\|^2 + \|f', x_1\|^2}{\|f', x_1\|^2}; \quad \beta_{-1} = \beta_0
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Предлагаемые методы являются методами полного прогноза. Следует отметить, что для систем большой размерности (≥ 40) наиболее эффективны многошаговые методы полного прогноза, а для систем малой размерности методы неполного прогноза [1].

Литература

1. Мадорский В.М. Квазиньютоновские методы решения нелинейных уравнений. – Брест.: БрГУ. 2005. – 186с.