УДК 519.24

ИССЛЕДОВАНИЕ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ, ПОСТРОЕННОЙ ПО ПЕРЕСЕКАЮЩИМСЯ ИНТЕРВАЛАМ НАБЛЮДЕНИЙ

А.Ф.Войнов, студент,
Е.И.Мирская, кандидат физико-математических наук, доцент,
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, ot565@rambler.by

Статистический анализ временных рядов является одним из наиболее значимых в прикладном и теоретическом отношениях направлений математической статистики. Бурное развитие вычислительной техники значительно расширило сферы приложения методов статистического спектрального анализа временных рядов, которые в настоящее время широко применяются в самых разных областях науки и практики, таких как радиоэлектроника и электротехника, точная механика, экономика, социология, медицина, страхование, биология, геофизика и многих других.

Рассмотрим действительный стационарный случайный процесс $X(t)=\{X_a(t), a=\overline{1,r}\}$, $t\in Z=\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$ с $MX(t)=0$ и неизвестной матрицей спектральных плотностей $f(\lambda)=\{f_{ab}(\lambda), a,b=\overline{1,r}\}$, $\lambda\in\Pi=[-\pi,\pi]$, где

$$f_{ab}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{t=-\infty}^{\infty}R_{ab}(t)e^{-i\lambda t}.$$

Пусть $X_a(0), X_a(1),\ldots,X_a(T-1)$ - T последовательных наблюдений, полученных через равные промежутки времени, за составляющей $X_a(t)$ процесса $X(t)$, $t\in Z$, $a=\overline{1,r}$.

Предположим, что число наблюдений T представимо в виде $T=LN-(L-1)K$, где L - число пересекающихся интервалов, содержащих по N наблюдений, а N, K - целые числа, $0\le K<N$.

На каждом из интервалов разбиения построим модифицированную периодограмму $I_{ab}(\lambda,l)$, задаваемую равенством

$$I_{ab}(\lambda,l)=\frac{1}{2\pi\sum_{p=0}^{N-1}h_a^N(p)h_b^N(p)}H_a(\lambda,l)\overline{H_b(\lambda,l)},$$

где $h_a^N(t), t\in R$ - окна просмотра данных, $l=\overline{1,L}$, $\lambda\in\Pi$, $a,b=\overline{1,r}$, $H_a(\lambda,l)$ задается выражением

$$H_a(\lambda,l)=\sum_{p=0}^{N-1} h_a^N(p)X_a(p+(l-1)(N-K))e^{-i\lambda(p+(l-1)(N-K))},$$

$l=\overline{1,L}$, $\lambda\in\Pi$, $a=\overline{1,r}$.

Сглаживание наблюдений на каждом из отрезков разбиения производится одним и тем же окном просмотра данных.

В качестве оценки взаимной спектральной плотности процесса исследована статистика вида

$$\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)=\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} I_{ab}(\lambda,l). \qquad (1)$$

Вычислены математическое ожидание, дисперсия и ковариация оценки взаимной спектральной плотности (1), построенной путем осреднения модифицированных периодограмм по пересекающимся интервалам наблюдений для многомерных временных рядов и произвольных окон просмотра данных. Доказана

Теорема. Математическое ожидание оценки взаимной спектральной плотности $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, $a,b=\overline{1,r}$, задаваемой соотношением (1), имеет вид

$$M\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)=\int_{\Pi} f_{ab}(x+\lambda)\Phi_{ab}(x)dx,$$

где

$$\Phi_{ab}(x)=\left[2\pi\sum_{t=0}^{N-1} h_a^N(t)h_b^N(t)\right]^{-1}\varphi_a(x)\overline{\varphi_b(x)},$$

$$\varphi_a(x)=\sum_{t=0}^{N-1} h_a^N(t)e^{itx},$$

$x\in\Pi$.

Проведен сравнительный анализ оценки взаимной спектральной плотности (1) в зависимости от окон просмотра данных, числа интервалов разбиения наблюдений, способа ее построения.

Для исследования оценки (1) был исследован ряд, состоящий из 1360 наблюдений ежедневной влажности воздуха в городе Бресте с 1.01.2004 г. по 10.11.2008 г.

При разбиении исходной последовательности наблюдений на L пересекающихся интервалов по N значений в каждом были рассмотрены случаи:

L=15, N=100, K=10;

L=30, N=55, K=10;

L=50, N=37, K=10;

Наиболее эффективными является использование окон просмотра данных Хэмминга и Рисса. Показано, что дисперсия оценки (1) уменьшается при увеличении числа интервалов разбиения исходной последовательности наблюдений.