УДК 513.82

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ КАНОНИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ В РЕДУКТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е.Е. Гурская, студент,
А.А. Юдов, кандидат физико-математических наук, доцент,
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, algebry@brsu.brest.by

Рассмотрим четырехмерное псевдоевклидово пространство нулевой сигнатуры – пространство 2R4 и группу Ли G движений этого пространства. Алгебра Ли $\widetilde{G}$ группы Ли G имеет базис {i1, i2, ..., i10}, где i1=E21; i2=E31; i3=E41; i4=E51; i5=E23-E32; i6=E24+E42; i7=E25+E52; i8=E34+E43; i9=E35+E53; i10=E45-E54; Eij – (5×5)-матрица, у которой в i-строке и j-столбце стоит 1, а остальные 0.

Представим пространство 2R4 в виде однородного φ –пространства В.И. Ведерникова.

Рассмотрим следующий эндоморфизм φ группы G:

$$\varphi : G \to G : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

При помощи эндоморфизма φ построим φ – пространство X по правилу:

$$X = \left\{ a\varphi\left(a^{-1}\right) \middle| \, a \in G \right\}$$

В этом множестве X транзитивно действует группа G:

$$(G, X) \to X : \left(g, a\varphi\left(a^{-1}\right)\right) \to g\, a\varphi\left(a^{-1}\right)\varphi\left(g^{-1}\right).$$

При этом, X становится однородным пространством со структурной группой G. Непосредственным вычислением получаем, что множество X состоит из элементов вида:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & \varepsilon \end{pmatrix} \right\}$$

, где

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Группа стационарности элемента. O=E$\in$X, совпадает с множеством всех φ – неподвижных элементов группы G, т. е. с множеством: $\left\{\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&&&&\\0&&\grave{A}&&\\0&&&&\\0&&&&\end{pmatrix}\right\}$, где A$\in$H.

Имеет место

Теорема: G – пространства 2R4 X, G/H изоморфны, причём G – изоморфизм задаётся отображениями:

$$\delta,\psi:\begin{pmatrix}1\\x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\xrightarrow{\delta}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\x_1&1&0&0&0\\x_2&0&1&0&0\\x_3&0&0&1&0\\x_4&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\psi}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\x_1&1&0&0&0\\x_2&0&1&0&0\\x_3&0&0&1&0\\x_4&0&0&0&1\end{pmatrix}H.$$

Рассмотрим для модели φ-пространства X формулы канонической проекции: $\pi:G\to X\equiv G/H:a\to aH$,

$$\pi:G\to G/H\equiv X:\begin{pmatrix}1&0\\t&A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0\\t&A\end{pmatrix}H=\begin{pmatrix}1&0\\t&E\end{pmatrix}H\equiv\begin{pmatrix}1&0\\t&E\end{pmatrix}\in X$$

Среди однородных редуктивных пространств с двумерными группами стационарности флаговый образ стационарности имеют группы G14={i5,i10} и G15={i6,i9}: (R2, R0) и (1R2, R0) соответственно. Будем задавать 2R4 как φ-пространство. Тогда евклидова плоскость, точка R0 (начало координат) и псевдоевклидова плоскость будут задаваться соответственно матрицами:

R2=$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\\lambda&1&0&0&0\\\mu&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$; R0=$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$; 1R2=$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\\lambda&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\\mu&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$.

Рассмотрим редуктивные однородные пространства G/G14, G/G15. Редуктиные дополнения для них имеют соответственно вид: {i1, i2, i3, i4, i6, i7 , i8, i9}; { i1, i2, i3, i4, i5, i7 , i8, i10}.

Однопараметрическая группа Ли, соответствующая оператору ik (k = 1, 2, 3, …, 10) состоит из элементов вида: e^{ti_k} = E + tik + $\dfrac{t^2 i_k^{\,2}}{2!}+\dfrac{t^3 i_k^{\,3}}{3!}+\ldots$.

Отсюда получим: e^{ti_5}=$\begin{bmatrix}\cos t&\sin t&0&0\\-\sin t&\cos t&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$; e^{-ti_5}=$\begin{bmatrix}\cos t&-\sin t&0&0\\\sin t&\cos t&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

Произведя соответствующие вычисления, найдем, что геодезические линии, соответствующие оператору i5, имеют вид:

$$
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\cos t & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda\sin t & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right].
$$

Результаты исследований данной работы могут быть использованы при решении прикладных задач, возникающих в физике, технике, экономике.