УДК 519.24

# ИССЛЕДОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ПЕРИОДОГРАММЫ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Д.В. Данилович, студент,
Е.И. Мирская, кандидат физико-математических наук, доцент,
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, thenotic1@tut.by

Современный этап развития теории вероятностей и математической статистики характеризуется значительным расширением теоретических исследований по статистическому спектральному анализу (анализу в частотной области) временных рядов и их практическим применением во многих областях человеческой деятельности, таких как экономика, спектроскопия, медицина, биология, страхование, финансы, социология, радиоэлектроника, электротехника, геофизика, геология и многие другие. При этом, как правило, применяется математический аппарат теории стационарных случайных процессов.

В данной работе в качестве оценки взаимной спектральной плотности многомерного стационарного случайного процесса исследована модифицированная периодограмма.

Пусть $X(t)=\left\{X_a(t), a=\overline{1,r}\right\}, t\in Z$ многомерный стационарный случайный процесс с неизвестной взаимной спектральной плотностью $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda\in\Pi=[-\pi,\pi]$, $a,b=\overline{1,r}$. В качестве оценки спектральной плотности процесса $X(t)$ рассмотрим модифицированную периодограмму вида

$$I_{ab}^T(\lambda)=d_a^T(\lambda)\overline{d_b^T(\lambda)}, \qquad (1)$$

где $d_a^T(\lambda)$ - модифицированное конечное преобразование Фурье наблюдений, заданное выражением вида

$$d_a^T(\lambda)=[2\pi\sum_{t=0}^{T-1}h_T^2(t)]^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=0}^{T-1}X_a(t)h_T(t)e^{-it\lambda},$$

где $h_T(t)=h(\frac{1}{T})$ - окна просмотра данных. Доказана

Теорема 1. Для статистики (1) справедливо равенство

$$MI_{ab}^T(\lambda)=\int_{\Pi}f_{ab}(u+\lambda)\Phi_T(u)du,$$

$\lambda\in\Pi$, где функция $\Phi_T(u)$ - ядро Фейера.

Доказательство. Подставляя $d_a^T(\lambda), d_b^T(\lambda)$ в явном виде и используя свойства математического ожидания, можем записать

$$MI_{ab}^T(\lambda)=\left[2\pi\sum_{t=0}^{T-1}h_T^2(t)\right]^{-1}\sum_{t_1,t_2=0}^{T-1}M\{X_a(t_1)X_b(t_2)\}h_T(t_1)h_T(t_2)e^{-i(t_1-t_2)\lambda}.$$

Используя определение взаимной ковариационной функции и определение ядра Фейера, получим

$$MI_{ab}^T(\lambda)=\int_\Pi f_{ab}(v)\left[2\pi\sum_{t=0}^{T-1}h_T^2(t)\right]^{-\frac{1}{2}}\sum_{t_1=0}^{T-1}h_T(t_1)e^{-i(v-\lambda)t_1}\times$$

$$\times\left[2\pi\sum_{t=0}^{T-1}h_T^2(t)\right]^{-\frac{1}{2}}\sum_{t_2=0}^{T-1}h_T(t_2)e^{-i(v-\lambda)t_2}dv=\int_\Pi f_{ab}(v)\Phi_T(v-\lambda)dv.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Если взаимная спектральная плотность $f_{ab}(\lambda)$ непрерывна в точке $\lambda\in\Pi$, ограничена на $\Pi$, то

$$\lim_{T\to\infty}MI_{ab}^T(\lambda)=f_{ab}^T(\lambda),$$

где $\lambda\in\Pi$, $a,b=\overline{1,r}$.

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\left|MI_{ab}^T(\lambda)-f_{ab}(\lambda)\right|=\left|\int_\Pi f_{ab}(u+\lambda)\Phi_T(u)du-f_{ab}(\lambda)\right|\le$$

$$\le\int_\Pi\left|f_{ab}(u+\lambda)-f_{ab}(\lambda)\right|\left|\Phi_T(u)\right|du=$$

$$=\int_{\{|u|\le\delta\}}\left|f_{ab}(u+\lambda)-f_{ab}(\lambda)\right|\left|\Phi_T(u)\right|du+$$

$$+\int_{\Pi\setminus\{|u|\le\delta\}}\left|f_{ab}(u+\lambda)-f_{ab}(\lambda)\right|\left|\Phi_T(u)\right|du=I_1+I_2,$$

где $0<\delta<\pi$.

Рассмотрим $I_1$. Так как функция $f_{ab}(u+\lambda)$ непрерывна в точке $x=\lambda$, то используя свойства ядра Фейера, получим

$$I_1\le\varepsilon\int_{\{|u|\le\delta\}}\left|\Phi_T(u)\right|du\le\varepsilon$$

Рассмотрим второе слагаемое. Используя свойства ядра Фейера можно показать, что

$$I_2\le2\max_{u\in\Pi}\left|f_{ab}(u+\lambda)\right|\int_{\Pi\setminus\{|u|\le\delta\}}\left|\Phi_T(u)\right|du\xrightarrow[T\to\infty]{}0,$$

Теорема доказана.