УДК 519.6 + 517.983.54

ВЫБОР МОМЕНТА ОСТАНОВА В МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Н.А. Дерачиц, студент,
О.В.Матысик, кандидат физико-математических наук, доцент,
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, algebry@brsu.brest.by

Встречается большой класс задач, где решения неустойчивы к малым изменениям исходных данных, т. е. сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к большим изменениям решений. Задачи подобного типа принадлежат к классу некорректных задач. На практике всё чаще и настойчивее стала возникать необходимость решать некорректные задачи. К таким задачам относятся задача Коши для уравнения Лапласа, задача решения интегрального уравнения 1-го рода, задача дифференцирования функции, заданной приближённо, обратная задача гравиметрии, обратная задача теории потенциала, задача спектроскопии. Некорректны также и задачи проектирования оптимальных систем, конструкций, задача создания систем автоматической обработки результатов физического эксперимента и т.д.

В гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряжённым оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что $0 \in S_A$, поэтому задача (1) неустойчива и, значит, некорректна. Для решения задачи предлагается метод итерации с попеременно чередующимся шагом

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y), \quad x_0 = 0,$$
$$\alpha_{2n+1} = \alpha, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y, ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближённой правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$. В этом случае метод (2) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}(Ax_{n,\delta} - y_\delta), \quad x_{0,\delta} = 0,$$
$$\alpha_{2n+1} = \alpha, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент m останова итерационного метода определим условиями

$$\begin{cases} \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, (n < m), \\ \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le \varepsilon, \quad \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \end{cases} \tag{4}$$

Считаем, что $\|A\| = 1$. Ниже итерационный метод (3) с правилом останова (4) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta \to 0}\left(\inf\limits_{m}\|x - x_{m,\delta}\|\right) = 0$. Обозначим через $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^{\frac{n}{2}}(1 - \beta\lambda)^{\frac{n}{2}}\right]$. Справедливы

Лемма 1. Пусть $A = A^* \ge 0, \|A\| \le 1$. Тогда для $\forall w \in H \quad (E - Ag_n(A))w \to 0, \ n \to \infty$.

Лемма 2. Пусть $A = A^* \ge 0, \|A\| \le 1$. Тогда $\forall v \in \overline{R(A)}$ имеет место соотношение $n^s\|A^s(E - Ag_n(A))v\| \to 0, \ n \to \infty, \ 0 \le s < \infty$.

Лемма 3. Пусть $A = A^* \ge 0, \|A\| \le 1$. Если для некоторого $n_k < \overline{n} = const$ и $v_0 \in \overline{R(A)}$ при $k \to \infty$ имеем $\omega_k = A(E - Ag_{n_k}(A))v_0 \to 0$, то $v_k = (E - Ag_{n_k}(A))v_0 \to 0$.

Сформулированные леммы используются при доказательстве следующих теорем.

Теорема 1. Пусть $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq 1$ и пусть момент останова $m = m(\delta)$ в методе (3) выбирается по правилу (4). Тогда метод (3) сходится.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и пусть решение уравнения (1) истокообразно представимо, т. е. $x = A^s z,\ s > 0$, тогда справедливы оценки т $\leq 2 + \frac{s+1}{\alpha+\beta}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}}$,

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + \frac{\alpha+\beta}{2}\left\{2 + \frac{s+1}{\alpha+\beta}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta. \qquad (5)$$

Замечание 1. Порядок оценки (5) есть $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$, и он оптимален в классе задач с истокообразно представимыми решениями.

Замечание 2. Используемое в формулировке теоремы 2 предположение, что порядок истокопредставимости точного решения равен $s > 0$, не потребуется на практике, так как при останове по невязке автоматически делается число итераций, нужное для получения оптимального по порядку приближённого решения.

Предложенный метод может быть применён для решения некорректных задач, встречающихся в технике, системах полной автоматической обработки экспериментов, математической экономике.