УДК 631.155:658.511

АНАЛИЗ ОБЩЕЙ ПРОДУКТИВНОСТИ ФАКТОРОВ ПРОИЗВОДСТВА: ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АСПЕКТ

Т. А. Земцова, магистрант,
С.М. Земцов, научный сотрудник,
Лейбниц институт аграрного развития в странах Центральной и Восточной Европы, Германия,

При анализе экономической эффективности сельскохозяйственных предприятий в научной литературе, как правило, используются метод стохастической граничной производственной функции и метод оболочки данных.

Цель данного доклада – ознакомить с теоретическими основами измерения эффективности и продуктивности аграрного производства во времени (динамическое измерение), используя параметрический метод разложения обобщенного Малмквист-индекса изменения общей продуктивности факторов в комбинации со стохастической граничной производственной функцией.

Для расчета изменения общей продуктивности факторов производства в динамике используется Малмквист-индекс. Данный индекс в научной литературе описывается с помощью функций расстояний. Ориентированная на выход функция расстояний имеет вид:

$$D_o^t(x^t, y^t) = \min_{\phi}\left\{\phi > 0 : \left(x^t, \frac{y^t}{\phi}\right) \in S^t\right\} \tag{1}$$

где, $S^t = \left\{\left(x^t, y^t\right): x^t \in \Re_+^{\ n}, y^t \in \Re_+^{\ m}, x^t \text{ может произвести } y^t\right\}$

Здесь $D_o^t(x^t, y^t)$ – ориентированная на выход функция расстояния; $x^t = (x_1^{\ t} \dots x_M^{\ t})$ и $y^t = \left(y_1^{\ t} \dots y_N^{\ t}\right)$ – векторы входных и выходных факторов соответственно; S^t – технологическое множество, описывающее все возможные комбинации входных и выходных факторов; $\Re_+^{\ m}$ и $\Re_+^{\ n}$ – m и n-мерные множества положительных вещественных чисел; t – индекс времени.

Логарифм обобщенного Малмквист-индекса изменения общей продуктивности в период времени с t до t+1 равен:

$$\ln m_o(x_{t+1}, y_{t+1}, x_t, y_t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial \ln D_o^{\ t+1}}{\partial \ln y_n} - \frac{\partial \ln D_o^{\ t}}{\partial \ln y_n}\right) \times \ln\left(\frac{y_n^{\ t+1}}{y_n^{\ t}}\right) -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{\partial \ln D_o^{\ t+1}/\partial \ln x_m}{\sum_{m=1}^{M}(\partial \ln D_o^{\ t+1}/\partial \ln x_m)} - \frac{\partial \ln D_o^{\ t}/\partial \ln x_m}{\sum_{m=1}^{M}(\partial \ln D_o^{\ t}/\partial \ln x_m)}\right) \times \ln\left(\frac{x_m^{\ t+1}}{x_m^{\ t}}\right) \tag{2}$$

Здесь $m_o(x_{t+1}, y_{t+1}, x_t, y_t)$ – обобщенный Малмквист индекс; $n = \overline{1,N}$ и $m = \overline{1,M}$ – соответственно индексы выходных и входных факторов.

Разница между функциями расстояний в период t и t+1 может быть представлена в следующем виде:

$$\ln D_o^{\ t+1} - \ln D_o^{\ t} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial \ln D_o^{\ t+1}}{\partial \ln y_n} + \frac{\partial \ln D_o^{\ t}}{\partial \ln y_n}\right) \times \ln\left(\frac{y_n^{\ t+1}}{y_n^{\ t}}\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{\partial \ln D_o^{\ t+1}}{\partial \ln x_m} + \frac{\partial \ln D_o^{\ t}}{\partial \ln x_m}\right) \times \ln\left(\frac{x_m^{\ t+1}}{x_m^{\ t}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ln D_o^{\ t+1}}{\partial t} + \frac{\partial \ln D_o^{\ t}}{\partial t}\right) \tag{3}$$

В результате преобразования равенств (2)-(3) мы получаем разложение Малмквист-индекса на составляющие:

$$\ln m_o(x_{t+1}, y_{t+1}, x_t, y_t) = \left[\ln D_o^{\ t+1} - \ln D_o^{\ t}\right] - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ln D_o^{\ t+1}}{\partial t} + \frac{\partial \ln D_o^{\ t}}{\partial t}\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}(RTS^{t+1} \times e_m^{\ t+1} + RTS^t \times e_m^{\ t}) \times \ln\left(\frac{x_m^{\ t+1}}{x_m^{\ t}}\right) = \ln \Delta ECH + \ln \Delta TCH + \ln \Delta SCH \tag{4}$$

где $RTS^t = \left(-\sum_{m=1}^{M}\partial \ln D_o^{\ t}/\partial \ln x_m\right) - 1$; $e_m^{\ t} = \dfrac{\partial \ln D_o^{\ t}/\partial \ln x_m}{\sum_{m=1}^{M}\left(\partial \ln D_o^{\ t}/\partial \ln x_m\right)}$

Первый и второй терм в равенстве (4) описывают соответственно изменения технической эффективности ($\ln \Delta ECH$) и производственной технологии ($\ln \Delta TCH$), третий терм – изменение в зависимости от масштаба производства ($\ln \Delta SCH$).

Нахождение функции расстояний с помощью трансцендентно-логарифмической функции требует решения задачи вида:

$$\ln D_{oi}^{t}(x^{t},y^{t})=\beta_0+\sum_{n=1}^{N}\beta_{y_n}\ln y_{ni}^{t}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\beta_{y_ny_j}\ln y_{ni}^{t}\ln y_{ji}^{t}+$$
$$+\sum_{m=1}^{M}\beta_{x_m}\ln x_{mi}^{t}+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}\sum_{s=1}^{M}\beta_{x_mx_s}\ln x_{mi}^{t}\ln x_{si}^{t}+\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\beta_{x_my_n}\ln x_{mi}^{t}\ln y_{ni}^{t}+$$
$$+\beta_t t+\frac{1}{2}\beta_{tt}t^2+\sum_{m=1}^{M}\beta_{x_mt}\ln x_{mi}^{t}t+\sum_{n=1}^{N}\beta_{y_nt}\ln y_{ni}^{t}t \tag{5}$$

при ограничениях: $\beta_{y_ny_j}=\beta_{y_jy_n};\beta_{x_mx_s}=\beta_{x_sx_m}$

$$\sum_{n=1}^{N}\beta_{yn}=1;\sum_{n=1}^{N}\beta_{y_ny_j}=0\left(j=\overline{1,N}\right);\sum_{n=1}^{N}\beta_{x_my_n}=0\left(m=\overline{1,M}\right);\sum_{n=1}^{N}\beta_{y_nt}=0$$

Первое ограничение связано со свойством симметрии для трансцендентно-логарифмических функций, второе – со свойством однородности в степени +1 по выходным факторам для функции расстояний.

Здесь β – неизвестные параметры для оценки; i – индекс наблюдения.

Нахождение неизвестных параметров непосредственно из равенства (5) при помощи метода наименьших квадратов или метода максимального правдоподобия затруднительно, так как зависимая переменная $\ln D_{oi}^{t}(x_t,y_t)$ является необозримой. Учитывая свойство однородности в степени +1 по выходным факторам для функции расстояний, мы имеем:

$$\ln D_{oi}^{t}\left(\frac{y_{ni}^{t}}{y_{Ni}^{t}},x_{mi}^{t}\right)=\ln\frac{D_{oi}^{t}(y_{ni}^{t},x_{mi}^{t})}{y_{Ni}^{t}} \tag{6}$$

Взаимосвязь между функцией расстояний и технической эффективностью по Фарреллу может быть представлена в виде [10]:

$$\ln D_{oi}^{t}(y_{ni}^{t},x_{mi}^{t})+u_i^{t}=0 \tag{7}$$

Здесь u_i^{t} – значения неотрицательной ошибки, позволяющей оценить неэффективность i-го наблюдения.

С учетом равенств (6) – (7) задача (5) может быть преобразована в следующий вид:

$$-\ln y_{Ni}^{t}=\beta_0+\sum_{n=1}^{N}\beta_{y_n}\ln\tilde{y}_{ni}^{t}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-1}\beta_{y_ny_j}\ln\tilde{y}_{ni}^{t}\ln\tilde{y}_{ji}^{t}+$$
$$+\sum_{m=1}^{M}\beta_{x_m}\ln x_{mi}^{t}+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}\sum_{s=1}^{M}\beta_{x_mx_s}\ln x_{mi}^{t}\ln x_{si}^{t}+\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N-1}\beta_{x_my_n}\ln x_{mi}^{t}\ln\tilde{y}_{ni}^{t}+$$
$$+\beta_t t+\frac{1}{2}\beta_{tt}t^2+\sum_{m=1}^{M}\beta_{x_mt}\ln x_{mi}^{t}t+\sum_{n=1}^{N-1}\beta_{y_nt}\ln\tilde{y}_{ni}^{t}t+v_i^{t}+u_i^{t} \tag{8}$$

где $\tilde{y}_{ni}^{t}=y_{ni}^{t}/y_{Ni}^{t}$; v_i^{t} – значения нормально распределенной с постоянной дисперсией случайной ошибки ($v\sim N(0,\sigma_v^2)$).

Задача (8) может быть решена с помощью метода максимального правдоподобия для различных видов распределения случайной величины u_i^{t}. Полученные в результате решения параметры используются в дальнейшем для расчета изменения технической эффективности, производственной технологии и изменения в зависимости от масштаба производства:

$$\ln \Delta ECH = \ln\left[\frac{E\left(\exp(-u_i^{t+1})\middle|(v_i^{t+1} - u_i^{t+1}\right)}{E\left(\exp(-u_i^{t})\middle|(v_i^{t} - u_i^{t}\right)}\right] \tag{9}$$

$$\ln \Delta TCH = -\frac{1}{2}\left[2\left(\beta_t + \beta_{tt}(t+0.5)\right) + \sum_{m=1}^{M} \beta_{x_m t} \ln\left(\frac{x_{mi}^{t+1}}{x_{mi}^{t}}\right) + \sum_{n=1}^{N-1} \beta_{y_n t} \ln\left(\frac{\tilde{y}_{ni}^{t+1}}{\tilde{y}_{ni}^{t}}\right)\right] \tag{10}$$

$$\ln \Delta SCH = \sum_{m=1}^{M}\left(RTS^{t+1} \times e_m^{t+1} + RTS^{t} \times e_m^{t}\right) \times \ln\left(\frac{x_m^{t+1}}{x_m^{t}}\right) \tag{11}$$

где $$\frac{\partial \ln D_o^t}{\partial \ln x_{mi}^t} = \beta_{xm} + \sum_{s=1}^{M} \beta_{x_m x_s} \ln x_{si}^t + \sum_{n=1}^{N-1} \beta_{x_m y_n} \ln \tilde{y}_{ni}^t + \beta_{x_m t} t$$

Таким образом, в данном исследовании описан параметрический метод разложения обобщенного Малмквист-индекса изменения общей продуктивности факторов производства. Разложение основано на параметрической оценке трансцендентно-логарифмической ориентированной на выход функции расстояний.