УДК 330.4

РЕШЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В.А. Козлов, студент,
И.Н. Климашевская, кандидат физико-математических наук, доцент,
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, draxu3@gmail.com

Дифференциальное исчисление — широко применяемый для экономического анализа математический аппарат. Базовой задачей экономического анализа является изучение экономических величин, записываемых в виде функций. Использование абстрактных математические рассуждений при исследовании различного рода экономических систем позволяет осуществлять их глубокий анализ и делать далеко идущие выводы относительно поведения экономических переменных, а также давать обоснованные рекомендации по оптимальному управлению экономикой.

Для демонстрации эффективности применения методов дифференциального исчисления в рамках экономической сферы рассмотрим типичную задачу об оптимальной партии товара. Пусть фирма потребляет некоторый товар с годовым объемом потребления A. Фирма закупает товар n раз в году через равные промежутки времени T = 1/n равными партиями объемом I0 = A/n. На временном промежутке между двумя покупками товар расходуется полностью и равномерно с постоянной скоростью i. Если обозначить через I(t) запас товара в момент t, то график I(t) примет вид:

$$I(t) = I(t + mT) \quad \forall t \in \left[0; \frac{1}{n}\right), \quad m = \overline{0, n-1},$$

поскольку на любом временном промежутке между двумя покупками функция запаса I(t) ведет себя одинаково.

На промежутке [0, T) функция имеет вид

$$I(t) = I_0 - i \cdot t, \text{ где } t \in [0, T).$$

Скорость ее изменения определяет производная $I'(t) = -i$. В начальный момент времени (момент покупки) запас товара равен объему покупки $I(0) = I_0$.

Фирма несет убытки, связанные с хранением товара и оформлением заказов. Заметим, что запас товара I(t) предполагается изменяющимся непрерывно. Как следствие среднегодовое значение запаса товара равно $I_{cp} = I_0 / 2$. Исходя из этого, получим, что годовой расход за хранение составляет

$$c \cdot I_{cp} = \frac{cI_0}{2},$$

где c – стоимость хранения одной единицы товара в течение года. Обозначим через b расходы за оформление одной покупки, тогда годовые расходы за оформление покупок составят nb. Суммарные годовые расходы фирмы, связанные с данным товаром, равны

$$G = \frac{cI_0}{2} + nb.$$

Функцию расходов с учетом $I_0 = A / n$ можно переписать в виде

$$G = \frac{cI_0}{2} + \frac{Ab}{I_0}$$, где $0 < I_0 \le A$. (*)

Заметим, что I0 – дискретная величина, поскольку все ее возможные значения имеют вид A/n, где A – константа, n – натуральное число. Наряду с дискретной функцией расходов (*) рассмотрим функцию

$$g(x) = \frac{cx}{2} + \frac{Ab}{x}$$, где $0 < x \le A$,

задаваемую той же формулой, что и G, но с областью определения (0, A]. Исследуем поведение g(x) на (0, A], используя дифференциальные методы. Найдем интервалы монотонности, точки экстремума, наибольшее и наименьшее значения для g(x). Вычислим производную и ее корни.

$$g'(x) = \frac{c}{2} - \frac{Ab}{x^2},$$

$$\frac{c}{2} - \frac{Ab}{x^2} = 0.$$

Производная имеет на (0, A] единственный корень $x_0 = \sqrt{\frac{2Ab}{c}}$. Построив промежутки монотонности замечаем, что в точке x0 функция имеет минимум. Очевидно, что значение g(x0) является наименьшим значением g(x) на (0, A]. Вернемся к функции расходов G(I0). График функции g(x) изображает непрерывная кривая, график дискретной функции расходов G(I0) представляет собой набор точек на этой кривой. Если при некотором $n \in N$ $x_0 = \frac{A}{n}$, то I0 = x0 – оптимальный объем покупки, минимизирующий годовые расходы фирмы. Если же при любом $n \in N$ $x_0 \ne \frac{A}{n}$, найдем m такое, что

$$\frac{A}{m+1} < x_0 < \frac{A}{m}.$$

Такое m всегда найдется, так как x0 < A, последовательность $\left\{\frac{A}{n}\right\}$ убывает и $\frac{A}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. Поскольку g(x) убывает на (0, x0] и G(I0) = g(I0) для любого $I_0 = \frac{A}{n}$, то $G\left(\frac{A}{k}\right) > G\left(\frac{A}{m+1}\right)$, когда k > m + 1. Из возрастания g(x) на [x0, A] следует, что $G\left(\frac{A}{m}\right) < G\left(\frac{A}{k}\right)$, когда k < m. Таким образом,

$$\min_{I_0 \in (0, A]} G(I_0) = \min\left\{G\left(\frac{A}{m+1}\right), G\left(\frac{A}{m}\right)\right\}$$

Для функции расходов, минимальные расходы фирма имеет, когда $I_0 = \frac{A}{3}, n = 3$.