УДК 517.983

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Н.Э. Попова, студент,
Т.И.Шило, кандидат физико-математических наук, доцент,
Брестский государственный университет, natasha-popova@mail.ru

В экономике все чаще применяются математические методы исследования. Экономисты постоянно сталкиваются с множеством данных, которые необходимо исследовать, чтобы выяснить, насколько ценную информацию можно из них извлечь. Любое такое исследование требует количественного анализа с применением математических методов. В данной работе рассмотрено применение теории дифференциальных уравнений к решению экономических задач.

В качестве примера рассмотрим динамическую модель Вальраса устойчивости рынка.

Задача. Имеется несколько продавцов и несколько покупателей некоторого товара. Некий посредник объявляет цену p на товар, после чего каждый продавец сообщает, сколько товара он может продать при такой цене. Найти закон изменения цены p на товар от времени, спроса и предложения.

Решение. Суммарное количество товара, выставляемое на продажу при данной цене, называется предложением и будем обозначать $S(p)$. Также каждый покупатель сообщает, сколько товара он собирается купить при данной цене. Сумма потребностей покупателей в дальнейшем будем называть спросом и обозначать $D(p)$. Введем понятие избыточного спроса $E(p)$ как разности между спросом и предложением: $E(p) = D(p) - S(p)$. Если $E(p) > 0$, цена растет до тех пор, пока не будет достигнуто равновесие, которое определяется равенством спроса и предложения, то есть равенством $D(p) = S(p)$ или $E(p) = 0$. Если $E(p) < 0$, т.е. имеет место избыточное предложение, происходит снижение цены пока не наступит равновесие. Здесь уместно сделать самое простое возможное предположение: скорость изменения цены во времени пропорциональна избыточному спросу.

Тогда

$$\frac{dp}{dt} = kE(p), \qquad (1)$$

где k — положительная константа, отражающая скорость процесса. Малый избыточный спрос вызовет медленное увеличение цены товара, большой избыточный спрос — быстрое увеличение цены, малое избыточное предложение — медленное понижение цены и т. д. Пусть спрос и предложение являются линейными функциями цены:

$D(p) = a + bp$ и $S(p) = g + dp$.

Приняв начальное условие $p(0) = p_0$, решение уравнения (1) примет вид:

$$p(t) = e^{kt(b-d)}\left(p_0 + \frac{a-g}{b-d}\right) - \frac{a-g}{b-d}.$$

Решение устойчиво, если $b - d < 0$ и неустойчиво при $b - d > 0$. Но b — тангенс угла наклона кривой спроса, а d — тангенс угла наклона кривой предложения, и если выполняется условие $b - d < 0$ (которое верно при убывании спроса и возрастании предложения с ростом цены), рынок устойчив, то есть избыточный спрос снижается и окончательно устраняется возрастающей ценой. Если $b - d > 0$, рынок неустойчив: будет иметь место непрерывная и неограниченная инфляция.

Вызывает также интерес задача об эффективности рекламы.

Пусть торговой фирмой реализуется некоторая продукция, о которой в момент времени $t = 0$ из рекламы получили информацию x0 человек из общего числа N потенциальных покупателей. Далее эта информация распространяется посредством общения людей. Найти число информированных о продукции людей в любой промежуток времени.

Решение. Пусть в момент времени $t > 0$ число знающих о продукции людей равно $x(t)$.Сделаем предположение, что скорость роста числа знающих о продукции пропорциональна как числу осведомлённых в данный момент покупателей, так и числу неосведомленных покупателей. Эта зависимость описывается следующим дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x).$$

Здесь k – положительный коэффициент пропорциональности. Из уравнения получаем равенство дифференциалов двух функций аргумента t:

$$\frac{dx}{x(N - x)} = kdt.$$

Интегрируя левую и правую части, находим общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{1}{N}\ln\frac{x}{N - x} = kt + C.$$

В общее решение входит неопределенная константа C. Полагая $NC = D$, получим равенство:

$$\frac{x}{N - x} = e^{Nkt + D},$$

из которого определим функцию $x(t)$:

$$x(t) = \frac{N}{1 + Ee^{-Nkt}}, \text{ где } E = e^{-D}.$$

Если теперь учесть, что $x(0) = x_0$ и положить $x_0 = \dfrac{N}{a}$, где $a > 0$, то можно найти значение константы E. Логистическая функция примет вид:

$$x(t) = \frac{N}{1 + (a - 1)e^{-Nkt}}.$$

С помощью логистической функции описываются многие экономические, социальные, технологические и биологические процессы, например, постоянный рост продаж, распространение слухов, распространение технических новшеств, рост популяции определенного вида животных и др.