УДК 517

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Т.С.Савосик, студент,
Т.И.Шило, кандидат физ.-мат.наук,доцент,
Брестский государственный университет имени А.С.Пушкина

Метод наименьших квадратов относится к так называемым методам аппроксимации, или приближенного восстановления функции по известным её значениям в ряде точек.

На практике часто возникает задача о наилучшем подборе так называемых эмпирических формул, которые позволяют аналитически представить данные измерений, статистической обработки экспериментов, наблюдений.

Задача нахождения эмпирических формул состоит из двух этапов:

подбор вида эмпирической формулы, зависящий от параметра;

нахождение этих параметров по некоторому критерию.

Допустим, что на основании опыта определены значения переменных x и y

x	x1	xn-1	xn
y	y1	yn-1	yn

Рассмотрим пары значений (xi,yi). Предположим,что между x и y существует зависимость y=ax+b. Найдем параметры a и b, для чего определим отклонения:

V1=ax1+b–y1,..., Vn=axn+b–yn.

Воспользуемся наиболее распространенным критерием наименьших квадратов, т.е. отклонения будем считать наименьшими, если сумма их квадратов минимальная.

Составим сумму квадратов отклонений:

S(a,b)=(ax1+b–y1)2+...+(axn+b–yn)2.

Так как S(a,b) – функция двух переменных, то для нахождения ее наименьшего значения вычислим ее частные производные первого порядка.

Приравняв частные производные к нулю и преобразовав их, получим систему

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Эта система называется нормальной системой уравнений для определения параметров a и b функции y=ax+b по методу наименьших квадратов. Решив эту систему уравнений, найдем a и b. Определим частные производные второго порядка и введем обозначения:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = A, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a\,\partial b} = B, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = C.$$

Так как Δ=AC–B2>0 и A>0, то функция S(a,b) имеет минимум при найденных значениях параметров a и b.

Применим этот метод к конкретному примеру.

Задача. В результате исследования зависимости между сроками эксплуатации автомобиля и расходами на его ремонт получены следующие данные.

t,лет	1	2	3	4	5	6	7	8
s,тыс.ден.ед.	120	140	230	370	445	570	655	770

Найти:

линейную зависимость стоимости ремонта автомобиля от срока эксплуатации S=at+b;

предполагаемую величину затрат на ремонт на 10-й год эксплуатации.

Решение. Для расчетов коэффициентов a и b составим следующую таблицу

i	xi	yi	xi2	xi yi
1	1	120	1	120
3	3	230	9	690
4	4	370	16	1480
5	5	445	25	2225
6	6	570	36	3420
7	7	655	49	4585
8	8	770	64	6160
$\sum_{i=1}^{8}$	36	3300	204	18960

С учетом данных таблицы составим систему уравнений

204a+36b=18960

36a+8b=3300.

Решая её, находим a= 97,857,b=–27,857.

Таким образом, функция, приближенно выражающая зависимость стоимости ремонта автомобиля от срока эксплуатации, имеет вид S=97,857a–27,857,а затраты за ремонт на 10-й год эксплуатации равны

S(10)=950,713тыс.ден.ед.