УДК 517.948

ТРЁХШАГОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Л. А. Савчук, студент, М. С. Коледа студент,
В.М. Мадорский, кандидат физико-математических наук, доцент,
Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, madorsky@tut.by

Для решения нелинейных систем вида:

(1) $$f(x)=0,\ f(D\in R^n\to R^n),\ f\in C_D^{(2)}$$

применяются как одношаговые, так и многошаговые итерационные методы.
В данной работе для решения модельной системы вида:

(2) $$\begin{cases} 2x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}+x_{n-1}+x_n=n+1, \\ x_1+2x_2+\ldots+x_{n-2}+x_{n-1}+x_n=n+1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_1+x_2+\ldots+2x_{n-2}+x_{n-1}+x_n=n+1, \\ x_1x_2\ldots x_{n-2}x_{n-1}x_n=1, \\ \sin^3 x_1+\cos^2 x_n=\sin^3 1+\cos^2 1. \end{cases}$$

применяется ряд трехшаговых методов.

Шаг 1: решается система линейных алгебраических уравнений:

(3) $$f'(x_n)\Delta x_n=-f(x_n),\ n=0,1,2,\ldots,$$

где $f'(x_n)$ - матрица Якоби, Δx_n - искомый вектор.

Шаг 2: вносится поправка в вектор x_n:

(4) $$x_{n+1}=x_n+\sqrt{\beta_n}\Delta x_n,\ n=0,1,2,\ldots,\ \beta_0\in[10^{-3},10^{-1}].$$

Шаг 3: проверяем условие:

(5) $$\|f(x_{n+1})\|<\varepsilon, \text{ где } \|f(x)\|=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i^2(x)}.$$

Если условие (5) выполняется, то x_{n-1} - приближенное решение системы (2). В противном случае производится пересчет β_{n+1}, для этого мы проверяем условие: если $\|f(x_{n+1})\|<\|f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1}=1$, иначе β_{n-1} находится по формулам, которые для каждого из трех методов свои, а именно:

Метод 1

$$\beta_{n+1}=\min\left(1,\frac{\gamma_n\|f(x_{n-1})\|}{\beta_n\|f(x_{n+1})\|}\right),\ \gamma_{n+1}=\frac{\gamma_n\|f(x_{n-1})\|}{\|f(x_{n+2})\|},\ \gamma_0=\beta_0^2.$$

Метод 2

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_{n-1})\|}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|}\right),\ \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \|f(x_{n-1})\| \cdot \|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\| \cdot \|f(x_{n+2})\|},\ \gamma_0 = \beta_0^2 \frac{\|f(x_0)\|}{\|f(x_1)\|}.$$

Метод 3

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_{n-1})\|}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|}\right),\ \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \|f(x_{n-1})\| \cdot \|f(x_{n+1})\|}{\|f(x_n)\| \cdot \|f(x_{n+2})\|},\ \gamma_0 = \beta_0^2 \frac{\|f(x_0)\|}{\|f(x_1)\|}.$$

И переходим к шагу 1, причем $\|f(x_{-1})\| = \|f(x_0)\|$.

Теорема. Пусть в интересующей нас области D оператор $f \in C_D^{(2)}$, $\|(f'(x))^{-1}\| \le B$, $\|f''(x)\| \le K$, $x \in D$, $\varepsilon_0 = 0.5KB^2\beta_0\|f(x_0)\| < 1$. Тогда итерационный процесс шаг 1 – шаг 3 со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^* - решению уравнения (1), если такое решение в D существует.

Доказательство теоремы для Метода 3 состоит из следующих этапов: вначале доказывается релаксационность процесса, то есть $\|f(x_{n+1})\| \le q_n \|f(x_n)\|$, $q_n < 1, n = 0,1,2...$ Далее доказываем, что все $\varepsilon_n = 0.5KB^2\beta_n\|f(x_n)\| < 1$. Нетрудно показать, что последовательность q_n монотонно убывает к нулю, последовательность итерационных параметров β_n монотонно возрастает к единице.

Для доказательства того, что β_n достигает единицы, берем предел:

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_{n-1}\|f(x_{n-2})\|}{\beta_{n-1}\|f(x_n)\|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_{n-2}\|f(x_{n-3})\|\cdot\|f(x_{n-1})\|\cdot\|f(x_{n-2})\|}{\beta_{n-1}\|f(x_n)\|^2\cdot\|f(x_{n-2})\|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_{n-2}\|f(x_{n-3})\|\cdot\|f(x_{n-1})\|}{\beta_{n-1}\|f(x_n)\|^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_{n-2}\beta_{n-2}\|f(x_{n-3})\|\cdot\|f(x_{n-1})\|^2}{\gamma_{n-2}\|f(x_n)\|^2\cdot\|f(x_{n-3})\|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\beta_{n-2}\|f(x_{n-1})\|^2}{\|f(x_n)\|^2} = \left[\|f(x_{n+1})\| \le q_n\|f(x_n)\|\right] \ge \lim_{n\to\infty}\frac{\beta_{n-2}\|f(x_{n-1})\|^2}{q_n^2\|f(x_{n-1})\|^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\beta_{n-2}^{\ 2}}{q_n^2} = +\infty.$$

Так как $\beta_n \uparrow 1$, а $q_n \to 0$ при $n \to \infty$, то на некотором шаге n_0 β_{n_0} становится равным единице. Таким образом, процесс входит в режим метода Ньютона с характерной для последнего квадратичной скоростью сходимости. Доказательство для других методов, рассматриваемых выше, проводится аналогично.

Вычислительный эксперимент на модельной системе (2) проводился при следующих начальных данных: точность $\varepsilon = 10^{-10}$, $\beta_0 = 10^{-2}$, начальные приближения берутся случайным образом из отрезка $[-1,1]$. Результаты эксперимента оформлены в виде таблицы:

	Сколько раз при 100 экспериментах при определённом N метод расходится.										
	N=5	N=6	N=7	N=8	N=9	N=10	N=11	N=12	N=13	N=14	N=15
Метод 1	1	2	1	2	4	21	24	66	66	80	92
Метод 2	0	5	2	16	14	48	61	90	91	96	99
Метод 3	0	0	1	7	1	3	2	5	7	9	4

из которой видно, что из рассмотренных трех методов наиболее эффективным как по скорости сходимости к решению, так и по широте области сходимости является Метод 3, далее идет Метод 2 и Метод 1.