УДК 517.983

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ НОРМЕ ДЛЯ НЕЯВНОГО МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Д.Б. Соколовский, студент,
В.Ф. Савчук, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики,
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

Поскольку некорректные задачи постоянно возникают в многочисленных приложениях математики, то проблема их решения и разработки новых методов их решения является актуальной. В работе предлагается новый метод решения некорректных задач. Цель работы – доказать сходимость предложенного метода и получить априорные оценки погрешности в энергетической норме гильбертова пространства, минимизировать оценки погрешности и получить априорный момент останова. Методологической основой исследования является общая теория некорректных задач, элементы функционального и математического анализа, вычислительной математики.

В гильбертовом пространстве H решается уравнение I рода

$Ax = y$, (1)

где А – ограниченный положительный и самосопряженный оператор, в предположении, что нуль принадлежит спектру оператора А, но не является собственным значением. Тогда задача о разрешимости уравнения (1) является неустойчивой и, следовательно, некорректной.

Предположим, что при точной правой части у существует точное решение х уравнения (1). Будем искать его, используя неявный итерационный метод

$$\left(E+\alpha A^2\right)x_{n+1}=\left(E-\alpha A^2\right)x_n+2\alpha Ay, \qquad x_0=0. \tag{2}$$

В случае, когда правая часть уравнения (1) известна с некоторой погрешностью $\delta:\|y-y_\delta\|\le\delta$ метод (2) примет вид

$$\left(E+\alpha A^2\right)x_{n+1,\delta}=\left(E-\alpha A^2\right)x_{n,\delta}+2\alpha Ay_\delta, \qquad x_{0,\delta}=0. \tag{3}$$

Доказана сходимость методов (2) и (3) в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A=\sqrt{(Ax,x)}$, получена оценка погрешности метода (3) в энергетической норме, причем для ее получения не потребовалось знаний об истокопредставимости точного решения. Использование энергетической нормы как бы заменяет истокопредставимость степени $s=1/2$ для точного решения.

Доказаны теоремы.

Теорема 1. При условии $\alpha>0$ итерационный метод (2) сходится в энергетической норме гильбертова пространства.

Теорема 2. При условии $\alpha>0$ итерационный метод (3) сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать из условия $n^{\frac{1}{4}}\delta\to 0$ при $n\to\infty,\ \delta\to 0$.

Теорема 3. При условии $\alpha>0$ общая оценка погрешности для метода (3) в энергетической норме запишется в виде

$$\|x-x_{n,\delta}\|_A\le(4n\alpha e)^{-\frac{1}{4}}\|x\|+2(4n\alpha)^{\frac{1}{4}}\delta$$

Теорема 4. При условии $\alpha>0$ оптимальная оценка погрешности для метода (3) в энергетической норме имеет вид

$$\|x-x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}}\le 2^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{8}}\delta^{\frac{1}{2}}\|x\|^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

и получается при

$$n_{\text{опт}}=2^{-4}\alpha^{-1}e^{-\frac{1}{2}}\delta^{-2}\|x\|^2$$

Замечание. Из (4) следует, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α, но $n_{\text{опт}}$ зависит от α. Поскольку на α нет ограничений сверху ($\alpha>0$), то за счет его выбора можно получить $n_{опт}=1,$ т.е. оптимальная оценка погрешности будет достигаться уже на первом шаге итераций. Для этого достаточно взять

$$\alpha_{опт}=2^{-4}e^{-1/2}\delta^{-2}\|x\|^2.$$

Выясним условия, при которых из сходимости метода в энергетической норме следует сходимость в исходной норме гильбертова пространства. Справедлива

Теорема 5. Если выполнены условия

1) $E_\varepsilon x_{n,\delta}=0,$ 2) $E_\varepsilon x=0,$ где $E_\varepsilon=\int_0^\varepsilon dE_\lambda$,

ε – фиксированное положительное число $\left(0<\varepsilon<\|A\|\right)$, то из сходимости $x_{n,\delta}$ к х в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.

Предложенный метод может быть успешно применен в прикладной математике: его можно использовать для решения задач, встречающихся в гравиметрии, спектроскопии, теории потенциала, синтезе антенн, акустике, автоматической обработке результатов физического эксперимента, определении формы радиоимпульса, излученного источником, и формы электрического импульса на входе кабеля.