УДК 519.6 517.983.54

ДВУХШАГОВЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

С.В. Харчик, студент,
О.В.Матысик, кандидат физико-математических наук, доцент,
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, algebry@brsu.brest.by

1. Постановка задачи. В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения задачи предлагается явный итерационный двухшаговый метод

$$x_n = 2(E - \alpha A)x_{n-1} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2} + \alpha^2 Ay, \quad x_0 = x_1 = 0. \tag{2}$$

В случае, когда правая часть y уравнения (1) известна приближённо $\|y - y_\delta\| \le \delta$, метод (2) примет вид

$$x_{n,\delta} = 2(E - \alpha A)x_{n-1,\delta} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2,\delta} + \alpha^2 Ay_\delta,\ x_{0,\delta} = x_{1,\delta} = 0. \tag{3}$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ.

2. Сходимость метода при точной правой части уравнения. Нетрудно доказать, что

$$x_n = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^n - n\alpha A(E - \alpha A)^{n-1}\right]y,\ x_0 = x_1 = 0.$$

Ввиду положительности самосопряжённого оператора A его интегральное представление имеет вид $A = \int_0^M \lambda\, dE_\lambda$, где E_λ – спектральная функция, $M = \|A\|$. Так как уравнение (1) имеет точное решение, то $A^{-1}y = x$, поэтому имеем

$$\|x-x_n\|=\left\|A^{-1}y-A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^n-n\alpha A(E-\alpha A)^{n-1}\right]y\right\|=$$

$$\le\left\|\int_0^M\lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^n dE_\lambda y\right\|+\left\|\int_0^M n\alpha(1-\alpha\lambda)^{n-1}dE_\lambda y\right\|.$$

Потребуем, чтобы при $0<\lambda\le M$ выполнялось $\|E-\alpha A\|<1$, т.е. $|1-\alpha\lambda|<1$ и, следовательно, $0<\alpha\lambda<2$. Отсюда $0<\alpha<2/M$. При этом условии каждый из двух интегралов по норме стремится к нулю при $n\to\infty$. Таким образом, $\|x-x_n\|\to 0$, при $n\to\infty$, т. е. справедлива

Теорема 1. Итерационный процесс (2) при условии $0<\alpha<2/M$ сходится.

2. Сходимость метода при приближенной правой части уравнения. Пусть $x_{n,\delta}$ – решение операторного уравнения (1), полученное по методу (3). Тогда $\|x-x_{n,\delta}\|\le\|x-x_n\|+\|x_n-x_{n,\delta}\|$. В силу ранее доказанного $\|x-x_n\|\to 0$ при $n\to\infty.$ Рассмотрим $\|x_n-x_{n,\delta}\|$. Методом математической индукции нетрудно доказать, что $\|x_n-x_{n,\delta}\|\le(5/4)(n-1)\alpha\delta$ при $0<\alpha\lambda\le 5/4,\ n\ge 1.$ Отсюда справедливо $\|x-x_{n,\delta}\|\le\|x-x_n\|+(5/4)(n-1)\alpha\delta.$ Для сходимости $\|x-x_{n,\delta}\|\to 0$ при $n\to\infty$ потребуем, чтобы $(n-1)\delta\to 0,\ \ n\to\infty,\ \ \delta\to 0$, т. е. будем выбирать число итераций n в зависимости от δ так, чтобы $n\delta\to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$. Итак верна

Теорема 2. Итерационный процесс (3) сходится при условии $0<\alpha\le\dfrac{5}{4M}$, если выбирать число итераций n в зависимости от δ так, чтобы $n\delta\to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$.

3. Оценка погрешности метода и ее оптимизация. Скорость сходимости к нулю $\|x-x_n\|$ может быть сколь угодно малой, и её нельзя оценить без дополнительных предположений. Потребуем, чтобы решение x было истокообразно представимо, т. е. $x=A^s z,\ s>0$. Тогда $y=A^{s+1}z$ и $x-x_n=$
$=\int_0^M\lambda^s(1-\alpha\lambda)^{n-1}dE_\lambda z+(n-1)\alpha\int_0^M\lambda^{s+1}(1-\alpha\lambda)^{n-1}dE_\lambda z.$ Тогда $\|x-x_{n,\delta}\|\le\|x-x_n\|+$
$+\|x_n-x_{n,\delta}\|\le s^s(s+2)[(n-1)\alpha e]^{-s}\|z\|_+(5/4)(n-1)\delta\alpha.$ Справедлива

Теорема 3. При условии $0<\alpha\le\dfrac{5}{4M}$ и $x=A^s z,\ s>0$ оценка погрешности для метода (3) имеет вид $\|x-x_{n,\delta}\|\le s^s(s+2)[(n-1)\alpha e]^{-s}\|z\|+(5/4)(n-1)\delta\alpha$.

Оптимизируем по n полученную оценку погрешности. Для ее минимизации производную по n от правой части оценки погрешности приравняем нулю. Получим nопт $=1+\left(\dfrac{5}{4}\delta\right)^{-1/(s+1)}e^{-s/(s+1)}s(s+2)^{1/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}\alpha^{-1}.$ Подставив nопт в оценку погрешности, найдем оптимальную оценку погрешности для метода (3)

$$\|x-x_{n,\delta}\|_{\text{опт}}\le(5/4)^{s/(s+1)}\delta^{s/(s+1)}e^{-s/(s+1)}(s+1)(s+2)^{1/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}.$$

Очевидно, что для уменьшения nопт, т. е. объёма вычислительной работы, следует брать α возможно большим из условия $0 < \alpha \le \frac{5}{4M}$, и чтобы nопт было целым.

Предложенный метод может быть успешно применён для решения некорректных задач, встречающихся в технике, гравиметрии, спектроскопии.