

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ НЕЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ
В СЛУЧАЕ НЕЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ

П.А. Шлак, студент,

В.Ф. Савчук, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, кандидат физико-
математических наук, доцент,

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, kaa@brsu.brest.by

Будем рассматривать в гильбертовом пространстве H уравнение

$$Ax = y \quad (1)$$

с ограниченным положительным самосопряжённым оператором A , для которого нуль является собственным значением оператора A , т.е. задача (1) имеет неединственное решение. Предположим, что $y \in R(A)$, т.е. при точной правой части y уравнения решение (неединственное) задачи (1) существует. Для его отыскания используем неявный итерационный метод

$$(E + \alpha A^3)x_{n+1} = (E - \alpha A^3)x_n + 2\alpha A^2 y, x_0 = 0. \quad (2)$$

Обозначим через $N(A) = \{x \in H | Ax = 0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H . Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 1. Пусть $A \geq 0, y \in H, \alpha > 0$, тогда для итерационного метода (2) верны следующие утверждения:

$$Ax_n \rightarrow \Pi(A)y, \|Ax_n - y\| \rightarrow J(A, y) = \inf_{x \in H} \|Ax - y\|;$$

а)

б) итерационный метод (2) сходится тогда и только тогда, когда уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. В

последнем случае $x_n \rightarrow P(A)x_0 + x^*$, где x^* – минимальное решение.

Доказательство.

Применим оператор A к (2), получим $A(E + \alpha A^3)x_n = A(E - \alpha A^3)x_{n-1} + 2\alpha A^3 y$, где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как $AP(A)y = 0$, то получим

$$(E + \alpha A^3)(Ax_n - \Pi(A)y) = (E - \alpha A^3)(Ax_{n-1} - \Pi(A)y).$$

Обозначим

$$Ax_n - \Pi(A)y = v_n, \quad v_n \in M(A), \quad \text{тогда} \quad (E + \alpha A^3)v_n = (E - \alpha A^3)v_{n-1}. \quad \text{Отсюда}$$

$$v_n = (E + \alpha A^3)^{-1}(E - \alpha A^3)v_{n-1}, \quad \text{следовательно,} \quad v_n = (E + \alpha A^3)^{-n}(E - \alpha A^3)^n v_0.$$

Имеем $A \geq 0$ и A – положительно определен в $M(A)$, т.е. $(Ax, x) > 0 \quad \forall x \in M(A)$. Так как $\alpha > 0$, то $\|(E + \alpha A^3)^{-1}(E - \alpha A^3)\| \leq 1$, поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\|v_n\| = \|(E + \alpha A^3)^{-n}(E - \alpha A^3)^n v_0\| = \left\| \int_0^{\|A\|} \left(\frac{1 - \alpha \lambda^3}{1 + \alpha \lambda^3} \right)^n dE_\lambda v_0 \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} \left(\frac{1 - \alpha \lambda^3}{1 + \alpha \lambda^3} \right)^n dE_\lambda v_0 \right\| +$$

$$+ \left\| \int_{\varepsilon_0}^M \left(\frac{1 - \alpha \lambda^3}{1 + \alpha \lambda^3} \right)^n dE_\lambda v_0 \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda v_0 \right\| + q^n(\varepsilon_0) \left\| \int_{\varepsilon_0}^M dE_\lambda v_0 \right\| = \|E_{\varepsilon_0} v_0\| + q^n(\varepsilon_0) \|v_0\| < \varepsilon$$

при $n \rightarrow \infty, \varepsilon_0 \rightarrow 0$. Здесь $\left| \frac{1 - \alpha \lambda^3}{1 + \alpha \lambda^3} \right| \leq q(\varepsilon_0) < 1$ при $\lambda \in [\varepsilon_0, \|A\|]$. Следовательно, $v_n \rightarrow 0$, откуда $Ax_n \rightarrow \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Отсюда $\|Ax_n - y\| \rightarrow \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = J(A, y)$. Итак, утверждение а) доказано. Докажем б).

Пусть процесс (2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \rightarrow Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (2) примет вид

$$\begin{aligned}(E + \alpha A^3)x_n &= (E - \alpha A^3)x_{n-1} + 2\alpha A^2 P(A)y = (E - \alpha A^3)x_{n-1} + 2\alpha A^3 x^* = \\ &= (E + \alpha A^3)x_{n-1} - 2\alpha A^3 x_{n-1} + 2\alpha A^3 x^* = (E + \alpha A^3)x_{n-1} + 2\alpha A^3 (x^* - x_{n-1}).\end{aligned}$$

Отсюда $x_n = x_{n-1} + 2\alpha A^3 (E + \alpha A^3)^{-1} (x^* - x_{n-1})$. Последнее неравенство разобьём на два:

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + 2\alpha (E + \alpha A^3)^{-1} A^3 P(A)(x^* - x_{n-1}) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0$$

$$\begin{aligned}\Pi(A)x_n &= \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha (E + \alpha A^3)^{-1} A^3 \Pi(A)(x^* - x_{n-1}) = \\ &= \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha (E + \alpha A^3)^{-1} A^3 \left[\Pi(A)x^* - \Pi(A)x_{n-1} \right] = \\ &= \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha (E + \alpha A^3)^{-1} A^3 \left[x^* - \Pi(A)x_{n-1} \right],\end{aligned}$$

так как $x^* \in M(A)$. Обозначим $w_n = \Pi(A)x_n - x^*$, тогда из равенства

$$\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* + 2\alpha (E + \alpha A^3)^{-1} A^3 [x^* - \Pi(A)x_{n-1}]$$

получим

$$w_n = w_{n-1} - 2\alpha (E + \alpha A^3)^{-1} A^3 w_{n-1} = (E + \alpha A^3)^{-1} (E - \alpha A^3)^{-1} w_{n-1}$$

и, аналогично v_n , можно показать, что $w_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Таким образом, $\Pi(A)x_n \rightarrow x^*$. Отсюда

$$x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \rightarrow P(A)x_0 + x^*, \text{ ч.т.д.}$$

Замечание 1. Так как у нас $x_0 = 0$, то $x_n \rightarrow x^*$, т.е. итерационный процесс (2) сходится к нормальному решению, т.е. к решению с минимальной нормой.