СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ СПОСОБОВ АППРОКСИМАЦИИ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Болтромеюк В.В., 4 курс,
Мадорский В.М., к.физ.-мат.н., доцент,
УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина».

Пусть функция $y=f(x)$ задана своими значениями в некоторых, вообще говоря произвольных n точках $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. Важной задачей численного анализа является восстановление в аналитическом виде сеточного представления функции. Существует ряд методов аппроксимации, среди которых наиболее эффективными считаются : аппроксимация тригонометрическими рядами Фурье, аппроксимация рядами Фурье по полиномам Чебышева 1-го рода, сплайн-аппроксимация.

Наиболее популярна в настоящее время сплайн-аппроксимация линейными и кубическими сплайнами, рядами Фурье и полиномами Чебышева 1-го рода.

Необходимость сплайн-аппроксимации состоит в том, что в отличии от алгебраического интерполирования, где при увеличении числа узлов увеличивается, как правило, степень интерполяционного полинома, в сплайн-аппроксимации можно работать со сплайнами невысокой степени, кроме того, при использовании сплайнов требования к гладкости функции предъявляются минимальные.

При использовании кубических сплайнов мы имеем дело с трехдиагональными системами, для эффективного решения которых с успехом применяется метод матричной прогонки.

Аппроксимация рядами Фурье используется для периодических функций.

В случае непериодической функции f(x) использование рядов Фурье для аппроксимации функций оказывается нецелесообразным.

В этом случае эффективным способом аппроксимации является аппроксимация рядами Фурье по полиномам Чебышева 1-го рода. Максимальная погрешность интерполирования достаточно гладкой функции на отрезке [0:1] многочленами n-й степени будет минимальна, когда в качестве узлов интерполяции берутся корни многочлена Чебышева. Ниже приводится используемые формулы:

$T_{n+1}(x) = 2*x*T_n(x) - T_{n-1}(x)$, причем $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$.

$$f(x) \approx P_m(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} c_k T_k\left(\frac{2x-b-a}{b-a}\right);$$

$$c_k = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j) T_k\left(\frac{2x_j-b-a}{b-a}\right),\ k=\overline{0,m},\ m+1 \le n;$$

$$x_j = \frac{b-a}{2}t_j + \frac{b+a}{2},\ t \in [-1,1],\ x \in [a,b];\ \text{где}\ t_j = \cos\frac{(2j-1)\pi}{2n},\ j=\overline{1,n};$$

Вычислительный эксперимент и его обсуждение:

Рассматриваются 2 непериодические функции и проводится сравнительный анализ восстановления приближенными функциями с помощью рядов Фурье, кубических сплайнов и рядов Фурье по полиномам Чебышева 1-го рода. Результаты эксперимента приводятся в таблице. Аппроксимация проводится на отрезке [0:pi].

Кол-во точек разбиения	Кол-во корней полинома Чебышева	Значение нормы в L_2		
		Ряд Фурье	Кубический сплайн	Полиномы Чебышева
x*exp(x)				
51	10	0,87355	0,01105	1,53981E-7
101	30	0,48164	0,00391	1,6799E -16
1001	200	0,05265	5,1525E-5	2,19724E-16
sin(x*x)*exp(x)				
51	10	0,15164	0,05712	0,08272
101	30	0,16109	0,01937	1,10423E-11
1001	200	0,06678	2,39311 E-4	4,23657E-17
1001	400	0,06678	2,39311 E-4	1,66734E-16

На основании результатов эксперимента можно сделать вывод о том, что наиболее целесообразным способом аппроксимации непериодических функций является аппроксимация рядами Фурье по полиномам Чебышева 1-го рода. Число корней полинома Чебышева 1-го рода более, чем 200 брать не целесообразно, т.к. это ведет к накоплению погрешностей и уменьшает точность аппроксимации.

Результаты работы могут быть использованы во всех прикладных задачах, где исходные данные получены экспериментально.